# 演習問題 の解答

たくさん問題を用意しました。自分に解けそうな問題からはじめて自信をつけてから難しい問題にも取り組んでください。

**1** これは微分の問題ですから、解けるはずです。合成関数の微分、積の微分、商の微分ができるかどうかが問われています。

(a)　これは $y = \tan u$ と $u = x^2 + 5$ を合成した関数の微分。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot 2x = \frac{2x}{\cos^2(x^2+5)}$$

(b)　これは $f(x) = \cos x - 1$, $g(x) = \cos x + 1$ とした時の商 $f(x)/g(x)$ の微分。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(\cos x + 1) - (\cos x - 1)(-\sin x)}{(\cos x + 1)^2} \\ &= \frac{-2\sin x}{(\cos x + 1)^2}\end{aligned}$$

(c)　これは普通に微分すれば良い。

$$\frac{dy}{dx} = \cos x + 3\sin x$$

(d)　これは $f(x) = x$, $g(x) = \log x$ の積の微分。

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

(e)　これは $y = e^u$ と $u = 4 - 2x$ の合成関数の微分。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u \cdot (-2) = -2e^{4-2x}$$

$u$ をもとに戻す事を忘れないように。

(f)　これは $f(x) = x^2$, $g(x) = e^{-x}$ の積の微分だが、$g(x) = e^{-x}$ は $g = e^u$ と $u = -x$ の合成関数だから、積の微分と合成関数の微分の両方を使う。まず $g'(x)$ を計算すると、

$$g'(x) = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du}\frac{du}{dx} = e^u \cdot (-1) = -e^{-x}$$

となるので、

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$$

(g)　$y = 1/\tan x = \cos x/\sin x$ だから、$f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ のときの商 $y = f/g$ の微分。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

(h)　これは $y = \sin u$ と $u = 1/x = x^{-1}$ の合成関数の微分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \cdot (-x^{-2}) = -x^{-2}\cos\frac{1}{x}$$

$u$ をもとに戻す事を忘れないように。

(i)　これも $y = 2\tan u$ と $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$ の合成関数の微分。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{2}{\cos^2 u}\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$$

(j)　これは $y = u\sin u$ と $u = \sqrt{x}$ の合成関数の微分。まず、$y = u\sin u$ を $u$ について微分して

$$\frac{dy}{du} = \sin u + u\cos u$$

であるので、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (\sin u + u\cos u)\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\cos\sqrt{x})$$

**2**. 3 次の微分はなかなか大変ですね。とくに (a) が脂っこい問題になってしまいました。とにかくまじめに微分するしかありません。

(a)　$f(x) = \log(1+x^3)$ を微分して、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2}{1+x^3} \\ f''(x) &= \frac{6x(1+x^3) - 9x^4}{(1+x^3)^2} = \frac{-3x^4+6x}{(1+x^3)^2} \end{aligned}$$

そのまま $f''(x)$ を商の微分公式で計算しても良いが、

$$f''(x) = (-3x^4+6x)(1+x^3)^{-2}$$

とかいて、積の微分公式を用いた方が少し簡単になる。

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= (-12x^3+6)(1+x^3)^{-2} + (-3x^4+6x)\cdot -2(1+x^3)^{-3}\cdot 3x^2 \\ &= \left[(-12x^3+6)(1+x^3) - 6x^2(-3x^4+6x)\right](1+x^3)^{-3} \\ &= \left[-12x^6 - 6x^3 + 6 + 18x^6 - 36x^3\right](1+x^3)^{-3} \\ &= (6x^6 - 42x^3 + 6)(1+x^3)^{-3} \end{aligned}$$

これより $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ だから

$$\log(1+x^3) = \frac{x^3}{6}\frac{6c^6 - 42c^3 + 6}{(1+c^3)^3} \qquad (c \text{ は } 0 \text{ と } x \text{ の間 })$$

となる。

(b)　$f(x) = \sin x$ の 3 次までの導関数を求めて、

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f^{(3)}(x) = -\cos x$$

だから、Taylor の定理により、

$$\sin x = \sin\pi + (x-\pi)\cos\pi + \frac{(x-\pi)^2}{2}(-\sin\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!}(-\cos c)$$

( $c$ は $\pi$ と $x$ の 間 ) となる。これより、

$$\sin x = -(x-\pi) - \frac{(x-\pi)^3}{6}\cos c$$

(c)　$f(x) = 1/\sqrt{1-2x} = (1-2x)^{-1/2}$ の 3 次までの導関数を求めて、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-\frac{1}{2})(-2)(1-2x)^{-3/2} = (1-2x)^{-3/2} \\ f''(x) &= (-\frac{3}{2})(-2)(1-2x)^{-5/2} = 3(1-2x)^{-5/2} \\ f^{(3)}(x) &= 3(-\frac{5}{2})(-2)(1-2x)^{-7/2} = 15(1-2x)^{-7/2} \end{aligned}$$

となり、$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 3$ なので、Taylor の定理により、

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x}} = 1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{5x^3}{2}(1-2c)^{-7/2}$$

( $c$ は 0 と $x$ の間 )

**3**.　差をとって $f(x) = e^x - 1 - x \geq 0$ を示せば良い。$f(x)$ の最小値を調べる。

$$f'(x) = e^x - 1,\ f''(x) = e^x > 0$$

であるので、$f'(x)$ は単調増加になる。 $f'(0) = 1 - 1 = 0$ だから、増減表は次のようになる。

| $x$ | $x < 0$ | 0 | $x > 0$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | 最小値 | $\nearrow$ |

したがって、 $f(x) = e^x - 1 - x$ は $x = 0$ で最小値 $f(0) = 1 - 1 = 0$ をとる。すなわち、$f(x) = e^x - 1 - x \geq 0$

**4**.　 これも考え方は上と同じ。 $f(x) = 2x - \sin 2x$ が $x \geq 0$ で最小値 0 をとることを示せば十分。

$$f'(x) = 2 - 2\cos 2x = 2(1 - \cos 2x) \geq 0$$

だから、 $f(x)$ は単調増加する。 $f(0)=0$ なので、 $x \geq 0$ のとき、

$$f(x) \geq f(0) = 0$$

だから、$x \geq 0$ のとき、$f(x)$ は $x=0$ で最小値 0 をとる。

**5**. やはり、高校の時にやった方法が有効。

$$y = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$$

のグラフと $y=a$ のグラフの開区間 $(0,\pi)$ 内の交点の数を見る。まず、$f(x) = 1/\cos x + 1/\sin x$ の増減を調べよう。

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)}{\sin^2 x \cos^2 x} \end{aligned}$$

なので、$1 + \sin x \cos x > 0$ に注意すると、増減表は次のようになる。

| $x$ | $0$ | $\ldots$ | $\pi/4$ | $\ldots$ | $\pi/2$ | $\ldots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\infty$ | $+$ | $\infty$ |
| $f(x)$ | $\infty$ | $\searrow$ | $2\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $\pm\infty$ | $\nearrow$ | $\infty$ |

$x=\pi/2$ のところでは $x < \pi/2$ から近づくと $f(x) \to \infty$ となり、$x > \pi/2$ から近づくと $f(x) \to -\infty$ であることが増減表から分かる。

したがって、 $a < 2\sqrt{2}$ の時は $y=a$ は $-\pi/2$ と $\pi$ の間で $y=f(x)$ と唯一回交わる。$a = 2\sqrt{2}$ のときはさらに、 $x=\pi/4$ で $y=f(x)$ と接している。 $a > 2\sqrt{2}$ のときは、$0 < x < \pi/4$ で 2 回交わっている。いずれの場合も $-\pi/2$ と $\pi$ の間では必ず $y=f(x)$ と 1 回交わるので、求める方程式の解は

- $a < 2\sqrt{2}$ のとき、解は唯一つ。
- $a = 2\sqrt{2}$ のとき、解は 2 つ。
- $a > 2\sqrt{2}$ のとき、解は 3 つ。

**6.** 不定積分の置換積分の問題。

(a) $t = x^2 - 2x + 2$ とおくと、$dt = (2x-2)dx$ なので、

$$\int (2x-2)(x^2-2x+2)^5\, dx = \int t^5\, dt = \frac{1}{6}t^6 + C = \frac{1}{6}(x^2-2x+2)^6 + C$$

(b) $t = e^x$ とおくと、$dt = e^x dx$ なので、

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx &= \int \frac{e^x}{1+e^x} e^x\, dx = \int \frac{t}{1+t}\, dt \\ &= \int (1 - \frac{1}{1+t})\, dt = t - \log|1+t| + C \\ &= e^x - \log(1+e^x) + C \end{aligned}$$

$1+e^x>0$ だから、log の中の絶対値は外せる事になる。
(c)　$t=\sqrt{x+1}$ とおくと、$t^2=x+1$ より、$x=t^2-1$ で、$2t\,dt=dx$ なので、

$$\begin{aligned}\int\frac{2x}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int\frac{2(t^2-1)}{t}2t\,dt=4\int(t^2-1)\,dt\\ &= \frac{4}{3}t^3-4t+C=\frac{4}{3}(x+1)^{3/2}-4(x+1)^{1/2}+C\end{aligned}$$

(d)　$t=3x-1$ とおくと、$x=(t+1)/3,\ dx=(1/3)dt$ なので、

$$\begin{aligned}\int x(3x-1)^4\,dx &= \int\frac{1}{9}(1+t)t^4\,dt=\frac{1}{9}\big(\frac{1}{6}t^6+\frac{1}{5}t^5\big)+C\\ &= \frac{1}{9}\big(\frac{1}{6}(3x-1)^6+\frac{1}{5}(3x-1)^5\big)+C\end{aligned}$$

(e)　$t=2+\log x$ とおくと、$dt=\frac{1}{x}\,dx$ なので、

$$\int\frac{2+\log x}{x}\,dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(2+\log x)^2+C$$

**7**.
(a)　これは部分積分の問題。$g(x)=(2x-3),\ f(x)=\cos x$ とおくと、$f(x)$ の原始関数は $F(x)=\sin x$ だから、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}(2x-3)\cos x\,dx &= [(2x-3)\sin x]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}2\sin x\,dx\\ &= (\pi-3)\sin\frac{\pi}{2}-(-3\sin 0)-[-2\cos x]_0^{\pi/2}\\ &= (\pi-3)-[0+2]=\pi-5\end{aligned}$$

(b)　これは置換積分。 $t=x-2$ とおくと、$t$ の変域は $-2$ から $0$ までで、$dx=dt$ だから、

$$\begin{aligned}\int_0^2 x(x-2)^5\,dx &= \int_{-2}^0(t+2)t^5\,dt=\left[\frac{1}{7}t^7+\frac{2}{6}t^6\right]_{-2}^0\\ &= \frac{1}{7}2^7-\frac{1}{3}2^6=-\frac{1}{21}2^6=-\frac{64}{21}\end{aligned}$$

(c)　$t=\sqrt{1+e^x}$ とおくと、$t^2=1+e^x$ より $2t\,dt=e^x\,dx,\ e^x=t^2-1$ をこれに代入すると、

$$\frac{2t}{t^2-1}\,dt=dx$$

となるので、$t$ の変域は $\sqrt{1+3}=2$ から $\sqrt{1+8}=3$ までで、

$$\begin{aligned}\int_{\log 3}^{\log 8}\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx &= \int_2^3\frac{1}{t}\frac{2t}{t^2-1}\,dt\\ &= \int_2^3\frac{2}{t^2-1}\,dt=\int_2^3\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\,dt\\ &= [\log|t-1|-\log|t+1|]_2^3\\ &= \log 2-\log 4-\log 1+\log 3=\log\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(d)　これはやや難問。

$$-x^2+x=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$$

と一度書き直してみると、$t=2x-1$ とおくと、$x-1/2=t/2$ なので、$dx=(1/2)dt$ で、$t$ の変域は 0 から 1 で、

$$\int_{1/2}^{1}\sqrt{-x^2+x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}(1-t^2)}\,dt=\frac{1}{4}\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$$

再び $t=\sin u$ とおくと、$dt=\cos u du$ で、$u$ の変域は 0 から $\pi/2$ となるので、

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,du=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2u}{2}\,du\\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{u}{2}+\frac{1}{4}\sin 2u\right]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

(e)　これも $\sqrt{1+x^2}$ が入った積分を計算する時の常套手段。$t=x+\sqrt{1+x^2}$ とおくと

$$(t-x)^2=1+x^2,\ \text{なので、}2tx=t^2-1\quad\therefore x=\frac{t^2-1}{2t}$$

なので、

$$dx=(1+\frac{1}{2t^2})dt$$

また、$t$ の変域は 1 から $1+\sqrt{2}$ となり、

$$\begin{aligned}&\int_0^1\log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx\\ =&\int_1^{1+\sqrt{2}}\log t(\frac{1}{2}+\frac{1}{2t^2})\,dt\\ =&\left[(\log t)(\frac{t}{2}-\frac{1}{2t})\right]_1^{1+\sqrt{2}}-\int_0^{1+\sqrt{2}}\frac{1}{t}(\frac{t}{2}-\frac{1}{2t})\,dt\\ =&(\frac{(1+\sqrt{2})^2-1}{2}\log(1+\sqrt{2})-\int_0^{1+\sqrt{2}}\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^2})\,dt\\ =&\log(1+\sqrt{2})+\frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{2}-1\\ =&\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

(f)　$t=x-a$ とおくと、$dx=dt,\ t$ の変域は 0 から $b-a$ なので、

$$\begin{aligned}\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx &= \int_0^{b-a}t(t-(b-a))\,dt=\left[\frac{t^3}{3}-(b-a)\frac{t^2}{2}\right]_0^{b-a}\\ &= (b-a)^3(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})=-\frac{1}{6}(b-a)^3\end{aligned}$$

(g)　$t = x - b$ とおくと $dx = dt$, $t$ の変域は、$a - b$ から $0$ までで、

$$
\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)(x-b)^2\,dx &= \int_{a-b}^0 (t+b-a)t^2\,dt = \left[\frac{t^4}{4} + (b-a)\frac{t^3}{3}\right]_{a-b}^0 \\
&= -(b-a)^4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{(b-a)^4}{12}
\end{aligned}
$$

**8**.

(a)　$x$ 軸を中心に回転した回転体の体積は、$-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} y^2\,dx &= \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2)^2 \\
&= \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 4x^2 + x^4)\,dx \\
&= 2\pi\left[4x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= 2\pi\left(4\sqrt{2} - \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{2}\right) \\
&= \frac{64}{15}\sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

(b)　求める回転体の体積は

$$
\begin{aligned}
\pi\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx &= \pi[\cos x \sin x]_0^{\pi/2} + \pi\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \\
&= \frac{\pi^2}{2} - \pi\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx
\end{aligned}
$$

故に、求める体積は $\pi^2/4$

(c)　求める回転体の体積は

$$
\begin{aligned}
\pi\int_0^{\log 2} xe^{-2x}\,dx &= \pi\left[-x\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^{\log 2} - \pi\int_0^{\log 2} \left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)dx \\
&= \pi\left(-\log 2\frac{2^{-2}}{2} + \left[-\frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^{\log 2}\right) \\
&= \pi\left(-\frac{\log 2}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{3 - 2\log 2}{16}\pi
\end{aligned}
$$

**9**.　$y = x^2$ と $y = \sqrt{x}$ は $x = 0, 1$ の 2 箇所で交わるので、求める回転体の体積は $0 \le x \le 1$ の間で、$y = \sqrt{x}$ を $x$ 軸の回りに回転させた図形の体積から $y = x^2$ を $x$ 軸の回りに回転させた図形の体積を引けば求められる。

$$
V = \pi\int_0^1 x\,dx - \pi\int_0^1 x^4\,dx = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}
$$