練習 11.1, 練習 12.1 の解答

練習 11.1 $z = xy$ の等高線を $z = 5, z = 3$ について考えるとそれぞれ

$$xy = 5, \quad xy = 3$$

という双曲線になる。

$y = 2$ での切口は $z = 2x$ という直線。また、$y = x$ での切口は $z = x^2$ という放物線になる。

この関数 $z = xy$ が $(0, 0)$ で連続な事を示そう。 $(x, y) \to (0, 0)$ のとき、$x \to 0$ かつ $y \to 0$ を満たしているので、(x, y) と $(0, 0)$ の距離 $\sqrt{x^2 + y^2}$ が 0 に近づく。

$$x^2 + y^2 - |xy| = \frac{1}{2}((|x| - |y|)^2 + x^2 + y^2) \geq 0$$

であるので、

$$0 \leq |xy| \leq x^2 + y^2 \to 0$$

となり、はさみうちの原理により、 $xy \to 0$ が分かる。

$x = r \cos t, y = r \sin t$ として、$|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$ をきっちり証明した人もいました。思わず「花〇」をつけてしまいました。

別解として、次のような推論を紹介します。結構皆さんの受けは良かったです。

$x \to 0$ なのだから、 $|x| \leq 1$ としておいて良い。（いずれはそうなるのだから、そこから先を考えれば良い。）このとき、

$$0 \leq |xy| \leq |y|$$

となるが、 $y \to 0$ なので、 $|y| \to 0$. あとは、はさみうちの原理で $|xy| \to 0$ が分かる。

講評　$x, y \to 0$ なのだから $xy \to 0$ とすぐに結論している人も結構いました。それで良いのですが、「もし、これを証明しろと言われたら？」と考えて、どうしたら良いか悩んだ人は授業中に質問してきました。良いですね。良いところに気がつきました。

そこで、上の二通りの証明を紹介しましたが、後の証明の方が皆さん分かりやすかったようです。

さて、x 軸から原点に近づく場合と y 軸から原点に近づく場合に調べて $z = xy$ の連続性を結論した人がいましたが、これは不十分なのです。なぜなら、 x 軸や y 軸に沿って原点に近づいた時は連続だけど、実は原点で連続でない関数があります。それが

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

という関数です。この関数は x 軸上および y 軸上では 0 なので、(x,y) が x 軸または y 軸にそって $(0,0)$ に近づく時は 0 に近づいていますが、(x,y) が $y=mx$ に沿って $(0,0)$ に近づいて行くと、

$$f(x,y)=f(x,mx)=\frac{mx^2}{(+m^2)x^2}=\frac{m}{1+m^2}\neq 0$$

となり、やっかいなことに傾き m の値が違うたびに極限の値も異なります。だから、 x 軸上と y 軸上だけ調べたのでは連続性は確かめられません。

そこで、工夫して、 $y=mx$ にそっても調べた人達がいました。このとき $z=xy=mx^2$ となり、たしかに $(x,y)\to(0,0)$ のとき $z\to 0$ になっています。

ところが、これでもまだダメなのです。というのは、 (x,y) が $(0,0)$ にどんな近づき方をしても $f(x,y)$ が $f(0,0)$ に近づく事がいえてはじめて f の連続性が言えるのですが、

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{(x+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\ \text{のとき}\\ 0 & (x,y)=(0,0)\ \text{のとき}\end{cases}$$

という関数を考えると、これは $y=mx$ にそって見てみると

$$f(x,mx)=\frac{mx^3}{x^2(1+m^2x^2)^2}=\frac{mx}{(1+m^2x^2)^2}\to 0$$

なのですが、$y=\sqrt{x}$ にそって見てみると、

$$f(x,\sqrt{x})=\frac{m}{1+m^2}\not\to 0$$

となってしまいます。だから、 $y=mx$ に沿ってみてみる事を付け加えてもまだ足りません。2 変数の関数は複雑ですね。

練習 12.1 (1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(4x^3y-6x^2y^4) &= 12x^2y-12xy^4\\ \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y-6x^2y^4) &= 4x^3-24x^2y^3\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\log(2x-5y)) &= \frac{2}{2x-5y}\\ \frac{\partial}{\partial y}(\log(2x-5y)) &= -\frac{5}{2x-5y}\end{aligned}$$

講評　こちらは良くできていました。何人かは計算間違いがありました。