練習 14.1 の解答

練習 14.1

(1)　$f(x,y) = xy(x+y) = x^2 + xy + y^2 + 6x + 3$ の極値を求める。

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + y + 6 = 0 & (1) \\ f_y &= x + 2y = 0 & (2) \end{aligned}$$

(2) より $x = -2y$ を (1) に代入。

$$-4y + y + 6 = 0, \quad \therefore y = 2,\, x = -4$$

極値をとる点の候補は $(x,y) = (-4,2)$ のみ

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = 2$$

より、

$$f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = -3 < 0$$

したがって、$f_{xx} > 0$ とあわせると、$(x,y) = (2,-4)$ で $f(x,y)$ は極小となる。$f(-4,2) = 16 - 8 + 4 - 24 + 3 = -9$ だから、f は $(-4,2)$ で極小値 -9 をとる。

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 6x + 3 = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(x+4)^2 - 9$$

と変形すると、-9 が最小値である事が分かる。

講評一番良くできていました。極小値を書き忘れた人が数人いました。

(2)　$f(x,y) = x^2 + y^4$ の極値を求める。

$$\begin{aligned} f_x &= 2x = 0 \\ f_y &= 4y^3 = 0 \end{aligned}$$

より $x = y = 0$ となり、極値を取る点の候補は $(x,y) = (0,0)$ のみ。

$$f_{xx} = 2, f_{xy} = 0, f_{yy} = 12y^2$$

なので、

$$f_{xy}^2(0,0) - f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) = 0$$

となり、これだけでは極値かどうかは判定できない。

　しかし、あきらかに、

$$f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0 = f(0,0)$$

であるので、f は $(0,0)$ で極小値 (最小値) 0 をとる。

講評　判別式が 0 になったので、「極値は存在しない」と答えた人が多かったです。本当は上のように最小値があるのですが、「判別できない」と答えた人は OK としました。

(3)　$f(x,y)=e^{-3x^2-y^2}$ の極値を求める。

$$\begin{aligned} f_x &= -6xe^{-3x^2-y^2}=0 \\ f_y &= -2ye^{-3x^2-y^2}=0 \end{aligned}$$

より $x=y=0$ となり、極値を取る点の候補は $(x,y)=(0,0)$ のみ。

$$f_{xx}=\left(-6+(6x)^2\right)e^{-3x^2-y^2},\quad f_{xy}=12xye^{-3x^2-y^2},\quad f_{yy}=\left(-2+(2y)^2\right)e^{-3x^2-y^2}$$

なので、

$$f_{x,y}(0,0)^2-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)=-12<0,\quad f_{xx}=-6<0$$

より、f は点 $(0,0)$ で極大値（最大値）1 をとる。
講評 この関数の 2 回微分、特に f_{xx},f_{yy} の計算を間違えた人が多かったです。どちらも積の微分になります。