練習 2.1, 練習 2.2 の解答

練習 2.1 (1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}) &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})\times\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{x}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \\ &= 0\cdot\frac{1}{2}=0\end{aligned}$$

講評 みんな良くできていました。問題を訂正したのですがもとのまま $\sqrt{x+3}-x$ を計算した人も結構いましたが、この場合は極限は $-\infty$ になります。これも良くできていました。

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-1}}{3x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

講評 これが一番良くできていました。分母分子を x で割ってから計算すると $\frac{1}{x^2}\to 0$ となることは皆さん分かっていて安心しました。分母と分子を違う数で割ったら等式では変形できません。気をつけましょう。

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x^2+x-x^2} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}{1}=2\end{aligned}$$

講評　これは分母を有理化します。（1）では分子を有理化しましたが、考え方は同じです。何人かの人はどうしたらよいか分からなかったようですが、（1）との類似が見えなかったのでしょう。見掛けに気を取られないで、「自分でも絶対解ける」と信じて解いてください。

練習 2.2 (1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2 \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot 2 = 2\end{aligned}$$

講評　ポイントは $2x$ をひとかたまりにみてやることで、$2x = y$ と書き直してやると、$x \to 0$ のとき $y \to 0$ だから上の式のような変形ができるわけです。みんな良くできていました。

別の解き方で、倍角の公式を使って

$$\frac{\sin 2x}{x} = \frac{2\sin x\cos x}{x} = 2\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x$$

として、$x \to 0$ のとき $\cos x \to 1$ であることを使って例 2.6 を使って上式右辺が $x \to 0$ のとき 2 に近づくことを示す答案も有りました。これも立派な解答です。

(2) $-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$ だから、両辺に $x \neq 0$ をかけると

$$-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|$$

（まず $x > 0$ のとき示して、$x \leq 0$ のときは $x = -|x|$ として計算します。）
$x \to 0$ のとき $|x| \to 0$ だから、上式の両辺は 0 に近づく。したがって「はさみうちの原理」により

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

となる。

講評　これが一番出来が悪かったです。典型的な間違いのパターンは、

$$x\sin\frac{1}{x} = \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

と変形するところまではいいのですが、これが $x \to 0$ のとき 1 に行くと答えてしまうことです。問題 (1) に引きずられていますね。上の式で、$y = \frac{1}{x} = y$ と書いてみると、$x > 0, x \to 0$ のとき $y = \frac{1}{x} \to \infty$ ですから、例 2.5 のパターンになっています。$x < 0, x \to 0$ のときは $y \to -\infty$ ですが、このときも

$$\lim_{y\to -\infty} \frac{\sin y}{y} = 0$$

ですから〈分母の絶対値が大きくなるので）結局

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$$

になります。**よく式をにらみ想像力を働かせる**のが解決の早道ですね。
〈急ぐとこれができません。）