練習 4.1〜 4.3 の解答

練習 4.1 (1)　$\sin(3x-2)$ は $f(x)=\sin x$ と $g(x)=3x-2$ の合成 $f\circ g$ なので、合成関数の微分の公式により、

$$\frac{d}{dx}\sin(3x-2)=(\cos(3x-2))\cdot 3=3\cos(3x-2)$$

講評　非常に良くできていました。合成関数の微分法で、別の覚え方もあります。上の例だと、 $y=\sin u,\ u=3x-2$ とおき、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\cos u\cdot 3=3\cos(3x-2)$$

とする方法です。最初の式は右辺を約分すると左辺になると形式的に見ることが出来るので覚えやすいですね。これはお勧めの方法です。

(2)　$\cos(x^3)$ は $f(x)=\cos x$ と $g(x)=x^3$ の合成 $f\circ g$ なので、合成関数の微分の公式により、

$$\frac{d}{dx}\cos(x^3)=-\sin(x^3)\cdot 3x^2=-3x^2\sin(x^3)$$

講評　cos の微分を忘れた人が数人いました。x^3 に気をとられてしまったようです。

(3)　$\sin^3 x$ は $f(x)=x^3$ と $g(x)=\sin x$ の合成 $f\circ g$ なので、合成関数の微分の公式により、

$$\frac{d}{dx}\sin^3 x=3\sin^2 x\cdot\cos x$$

講評　これは良くできていました。

(4)　$\dfrac{1}{1+\sin x}$ は $f(x)=\frac{1}{1+x}$ と $g(x)=\sin x$ の合成 $f\circ g$ なので、合成関数の微分の公式により、

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+\sin x}=-\frac{1}{(1+\sin x)^2}\cos x=-\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

講評　　これも商の微分なので、公式を間違えて覚えている人は間違えています。しっかり身につけてください。

練習 4.2 これも合成関数の微分

(1)　$f=e^x,\ g=-x$ とおくと $e^{-x}=f\circ g$ なので、

$$(e^{-x})'=e^{-x}\cdot(-1)=-e^{-x}$$

講評　　何人かの人が $e^{-x}=1/e^x$ として、これを微分すると $1/e^x$ としていました。でも、商の微分ですから

$$\Big(\frac{1}{e^x}\Big)'=\frac{0-(e^x)'}{e^{2x}}=-\frac{1}{e^x}=-e^{-x}$$

となります。

(2)　$f = x^2,\ g = \log x$ とおくと $(\log x)^2 = f \circ g$ なので、

$$\frac{d}{dx}(\log x)^2 = 2\log x \frac{1}{x} = \frac{2\log x}{x}$$

講評　これも良くできていました。問題はありません。

(3)　商の微分公式により、

$$\frac{d}{dx}\frac{\log x}{x} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

講評　やっぱり商の微分公式を間違えている人が数人います。きちんと覚えておいてください。

練習 4.3

(1)　$f(x) = x^\alpha$ の両辺の対数をとって $\log f(x) = \alpha \log x$ この両辺を微分すると、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x}$$

これより

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = f'(x) = f(x)\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

講評　良くできていました。公式として覚えている人も多いみたいで、対数微分せずに答えを直接だしている人も結構いました。問題の意図とは違うけど、知っているのなら良いでしょう。

(2)　$f(x) = x^{1/x}$ の両辺の対数をとって $\log f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

両辺を微分して (上の練習 4.2 (3) を使うと、)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

したがって、

$$\frac{d}{dx}x^{1/x} = f'(x) = f(x)\frac{1-\log x}{x} = x^{(1/x)-2}(1-\log x)$$

講評　難しいだろうと思っていましたが、ほとんどの人が出来ていました。両辺の対数をとって

$$\log f(x) = \frac{\log x}{x}$$

としてから、右辺と左辺を別々に微分して、結果を等式で結びます。片方だけ微分した人がいました。注意が必要ですね。

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

はいいですか？ $g(x) = \log x$ とすると、$\log f(x)$ は $g(f(x)) = g \circ f(x)$ ですから、合成関数の微分で $(\log f(x))' = g'(f(x))f'(x)$ としてから、 $g'(x) = (\log x)' = 1/x$ に x の代わりに $f(x)$ を代入すると、$g'(f(x)) = 1/f(x)$ がでます。