

練習 6.1, 練習 6.2 の解答

今回は皆さん苦戦したようです。死屍累々という有り様でした。微分の計算の間違いや、展開の最後の項に c が無かったり、 $\cos \pi$ や $\cos \frac{\pi}{4}$ の値が違っているなど、様々な間違いがありました。

一般的に、Taylor 展開を n 次まで行うというとき、

$$f(x) = f(a) + \dots$$

と両辺を等号で結ぶときは、展開の最後の項には $f^{(n)}(c)$ が入り、

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

となります。 c は $f^{(n)}(c)$ としてのみ現れ、 $(x-a)^n$ のところには現れません。

教科書に c がない解答があったのは、” $f(x) =$ ” と等号で結ぶ形で書かない場合で、無限に続く Taylor 展開の最初の 2 個や 3 個を書きなさいという問題に対する答えです。やや混乱を呼びましたが、上に書いたように、等号で “ $f(x) =$ ” と書き始めて展開する場合は、最後は c が必要です。

3 回微分まで計算したことは皆さん無かったようで、苦労した人が多かったようです。

練習 6.1

(1) $f(x) = \sqrt{x+2}$ を $x=2$ で 2 次まで Taylor 展開する。 $f(x)$ は $\sqrt{x} = x^{1/2}$ と $x+2$ の合成関数なので、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(x+2)^{-1/2} \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x+2)^{-3/2} = -\frac{1}{4}(x+2)^{-3/2} \end{aligned}$$

となる。これより、 $f(2) = \sqrt{4} = 2$, $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ となるので、

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &= f(2) + (x-2)f'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!}f''(c) \\ &= 2 + \frac{(x-2)}{4} - \frac{(x-2)^2}{2} \frac{1}{4}(c+2)^{-3/2} \\ &= 2 + \frac{(x-2)}{4} - \frac{(x-2)^2}{8}(c+2)^{-3/2} \end{aligned}$$

c は 2 と x の間。(講義では $a < x$ の場合のみ説明しましたが、 $x < a$ の場合も同じように出来ます。このとき c は $x < c < a$ で見つかります。)最後の式を簡単にまとめることはしなくて良いです。

講評 正答率は 82% でした。単純な計算間違いと、最後を $f''(2)$ を入れた人が多かったです。 $f''(c)$ のままで終わった人は、計算間違いをしないで済む分悪くないですが、正答とはしにくいですね。

(2) $f(x) = x \cos \pi x$ を $x = 1$ で 3 次まで Taylor 展開する。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos \pi x - x\pi \sin \pi x \\ f''(x) &= -\pi \sin \pi x - \pi \sin \pi x - x\pi^2 \cos \pi x = -2\pi \sin \pi x - x\pi^2 \cos \pi x \\ f^{(3)}(x) &= -2\pi^2 \cos \pi x - \pi^2 \cos \pi x + x\pi^3 \sin \pi x \\ &= -3\pi^2 \cos \pi x + x\pi^3 \sin \pi x \end{aligned}$$

なので、 $f(1) = \cos \pi = -1$, $f'(1) = \cos \pi - \pi \sin \pi = -1$, $f''(1) = -2\pi \sin \pi - \pi^2 \cos \pi = \pi^2$ となり、

$$\begin{aligned} x \cos \pi x &= -1 - (x-1) + \frac{\pi^2(x-2)^2}{2} \\ &\quad + \frac{(x-1)^3}{3!} \{ \pi^3 c \sin \pi c - 3\pi^2 \cos \pi c \} \end{aligned}$$

c は x と 1 の間。これもこれ以上簡単にまとめる必要はありません。

講評 この問題が一番出来が悪かったです。正答率は 63% でした。やはり、微分の計算が難しかったですね。「いそがば回れ」で、しっかりと計算した人が損をしないのです。

練習 6.2

$f(x) = \sin x$ を $x = \frac{\pi}{4}$ で 3 次まで Taylor 展開する。 $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$ なので、 $f(\pi/4) = \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$, $f'(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $f''(\pi/4) = -1/\sqrt{2}$ となり、

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} + (x - \frac{\pi}{4}) \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2\sqrt{2}} - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!} \cos c$$

c は $\pi/4$ と x の間。

講評 これも正当率は高く、83% ありました。最後を $f^{(3)}(\pi/4)$ とした人が目だったくらいで、あとは単純な計算ミスでした。