

練習 8.1, 練習 8.2 の解答

練習 8.1 (1) $t = 3x + 1$ とおく。両辺を t で微分して

$$1 = 3 \frac{dx}{dt}$$

これより、

$$\begin{aligned} \int (3x + 1)^{10} dx &= \int t^{10} \frac{dx}{dt} dt \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{11} t^{11} + C \right) \\ &= \frac{1}{33} (3x + 1)^{11} + C \end{aligned}$$

(2) $t = \sin x$ とおく。両辺を t で微分して

$$1 = \cos x \frac{dx}{dt} \quad \therefore \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos x}$$

これより、

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos x dx &= \int t^4 \cos x \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x + C \end{aligned}$$

(3) $t = e^{-x^2}$ とおく。両辺を t で微分して

$$1 = -2xe^{-x^2} \frac{dx}{dt} \quad \therefore \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2x} e^{x^2}$$

これより、

$$\begin{aligned} \int xe^{-x^2} dx &= -\int xe^{-x^2} 2xe^{x^2} dt \\ &= -\int \frac{1}{2} dt = -\frac{1}{2} t + C \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \end{aligned}$$

(4) $t = 2 - x^2$ とおく。両辺を t で微分して

$$1 = -2x \frac{dx}{dt} \quad \therefore \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2x}$$

これより、

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} dx &= -\int \frac{x}{\sqrt{t}} \frac{1}{2x} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int t^{-1/2} dt = -\frac{1}{2} 2t^{1/2} + C \\ &= -\sqrt{2-x^2} + C \end{aligned}$$

講評 ほとんどの人が出来ていました。不定積分では最後に変換した変数をもとに戻す事を忘れないように。

練習 8.2

(1) $t = \cos x$ とおく。両辺を t で微分して

$$1 = -\sin x \frac{dx}{dt} \quad \therefore \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sin x}$$

これより、

$$\begin{aligned} \int \sin x e^{\cos x} dx &= -\int \sin x e^t \frac{1}{\sin x} dt \\ &= -e^t + C = -e^{\cos x} + C \end{aligned}$$

(2) $t = \sqrt{x-2}$ とおく。両辺を t で微分して

$$1 = \frac{dx}{dt} \frac{1}{2} (x-2)^{-1/2} = \frac{dx}{dt} \frac{1}{2} t^{-1}$$

これより、

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

となり、

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-2} dx &= \int (t^2+2)t \cdot 2t dt \\ &= \int (2t^4 + 4t^2) dt \\ &= \frac{2}{5}t^5 + \frac{4}{3}t^3 + C \\ &= \frac{2}{5}(x-2)^{5/2} + \frac{4}{3}(x-2)^{3/2} + C \end{aligned}$$

$t = x-2$ とおいても良い。このときは $dx/dt = 1$ なので、

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-2} dx &= \int (t+2)t^{1/2} dt = \int (t^{3/2} + 2t^{1/2}) dt \\ &= \frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{4}{3}t^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{5}(x-2)^{5/2} + \frac{4}{3}(x-2)^{3/2} + C \end{aligned}$$

講評 これも良くできていました。特に言う事はありません。