練習 10.1, 練習 10.2 の解答

今回は計算間違いをした人が結構いました。やり方は分かっていても、部分積分は間違いやすいですね。ゆっくり、しっかり計算しましょう。

練習 10.1 (1)

$$\begin{aligned}\int e^x x^4\,dx &= e^x x^4 - \int e^x 4x^3\,dx = e^x(x^4-4x^3) + 4\cdot 3\int e^x x^2\,dx \\ &= e^x(x^4-4x^3+4\cdot 3x^2) - 4\cdot 3\cdot 2\int e^x x\,dx \\ &= e^x(x^4-4x^3+4\cdot 3x^2-4\cdot 3\cdot 2x) + 4!\int e^x\,dx \\ &= 4!e^x\sum_{j=0}^{4}\frac{(-x)^j}{j!} + C\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx &= -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx \\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx \\ &= (2-x^2)\cos x + 2x\sin x + C\end{aligned}$$

(3)

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3} = \frac{x+1}{x(x+2)(x+3)}$$

を解いて、$a = 1/6$, $b = 1/2$, $c = -2/3$. これより、

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x(x+2)(x+3)}\,dx &= \frac{1}{6}\int\frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}\,dx - \frac{2}{3}\int\frac{1}{x+3}\,dx \\ &= \frac{1}{6}\log|x| + \frac{1}{2}\log|x+2| - \frac{2}{3}\log|x+3| + C\end{aligned}$$

講評　計算間違いを除いてはみんな良くできていました。不定積分を計算する時は、最後に積分定数 C を足しておく事を忘れないでください。それから、

$$\int\frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$$

と、絶対値がつく事を忘れないでください。

練習 10.2

(1)　$a, b > 0$ としておいて良い。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{なので } y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

根号内が 0 以上になるのは $-a \leq x \leq a$ の時なので、これより、求める回転体の体積は

$$\begin{aligned} \pi\int_{-a}^{a} b^2\big(1-\frac{x^2}{a^2}\big)\,dx &= \pi b^2\int_{-a}^{a}\,dx - \pi\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}\,dx \\ &= 2\pi ab^2 - \frac{2}{3}\pi ab^2 \\ &= \frac{4}{3}\pi ab^2 \end{aligned}$$

(2)　求める体積は

$$\pi\int_{-a/2}^{a/2} b^2\big(1-\frac{x^2}{a^2}\big)\,dx$$

となり、これを計算すると

$$\begin{aligned} \pi ab^2 - \pi b^2\int_{-a/2}^{a/2}\frac{x^2}{a^2}\,dx &= \pi ab^2 - \pi b^2\frac{a}{12} \\ &= \frac{11}{12}\pi ab^2 \end{aligned}$$

講評　(1) で体積を不定積分のままにしている人が数人いました。多分、積分範囲を指定していなかったので、どこからどこまで積分するべきか分からなかったのでしょう。こういう場合は、与えられた関数が定義域が限られている場合が普通です。今の場合は上のように自然に x の動ける範囲が限られてきます。

(2) で、「オイラーの方法」と書いたため、オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

をどう使うのだろうと悩んだ人も多かったみたいです。これは以下に述べるようなエピソードからきたものですが、実は「オイラーの方法」ではなく {ケプラーの方法」でした。2 重に済みませんでした。

昔の話ですが、ワイン樽やビヤ樽にどのくらいの酒を詰める事ができるかみんな知らない時代の話です。おおきさもまちまちのそれぞれの樽にどのくらいワイン（またはビール）を詰める事が出来るかを知るために何を測ればほぼ正確にこの量が予測できるかが問題になっていたとき、ケプラーが

- 樽の一番太いところの半径 R
- 樽の上と下のところの半径 r
- 樽の高さ h

を測れば、体積は $\dfrac{\pi h}{3}(2R^2+r^2)$ で与えられる事を見付けたのです。樽を回転楕円体の一部と思うのですが、このとき、樽を横にするとこの体積を

$$\pi\int_{-h/2}^{h/2} R^2\big(1-\frac{x^2}{a^2}\big)dx = \pi R^2 h\left(1-\frac{h^2}{12a^2}\right)$$

と与えています。ただし、このままでは a が答えに残るので、$x = \frac{h}{2}$ のときの y の値 $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{4a^2}}$ が r になることを使って

$$a = \frac{h}{2\sqrt{1 - r^2/R^2}}$$

を代入すると上の式が出るわけです。

ハイデルベルグのお城の中にはとても大きなワイン樽があります。観光名所になってますが、この樽にどのくらいのワインが入るか知った殿様はきっと安心したことでしょう。

日本の酒樽は楕円体では無いですね。円錐の上のほうを切ったみたいに見えます。だれか計算してみませんか？