

微分積分学入門 演習問題

1. 次の関数を微分せよ。

(a) $y = \tan(x^2 + 5)$

(b) $y = \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}$

(c) $y = \sin x - 3 \cos x$

(d) $y = x \log x$

(e) $y = e^{4-2x}$

(f) $y = x^2 e^{-x}$

(g) $y = \frac{1}{\tan x}$

(h) $y = \sin \frac{1}{x}$

(i) $y = 2 \tan(\sqrt{x})$

(j) $y = \sqrt{x} \sin \sqrt{x}$

2. 次の関数を 3 次まで指定された点で Taylor 展開せよ。

(a) $f(x) = \log(1 + x^3) \quad (x = 0)$

(b) $f(x) = \sin x \quad (x = \frac{\pi}{3})$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \quad (x = 0)$

3. $e^x \geq 1 + x$ を証明せよ。

4. $x \geq 0$ のとき $2x \geq \sin 2x$ を証明せよ。

5. a を定数とするとき、

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = a$$

を満たす x は 区間 $(0, \pi)$ にいくつあるか。(ヒント $y = 1/\cos x + 1/\sin x$ のグラフを描く)

6. 次の不定積分を求めよ。

(a) $\int (2x - 2)(x^2 - 2x + 2)^5 dx$

(b) $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx$

(c) $\int \frac{2x}{\sqrt{x+1}} dx$

$$(d) \int x(3x-1)^4 dx$$

$$(e) \int \frac{2+\log x}{x} dx$$

7. 次の定積分を求めよ。

$$(a) \int_0^{\pi/2} (2x-3) \cos x dx$$

$$(b) \int_0^2 x(x-2)^5 dx$$

$$(c) \int_{\log 3}^{\log 8} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx \text{ (ヒント } t = \sqrt{1+e^x} \text{ とおく。)}$$

$$(d) \int_{1/2}^1 \sqrt{-x^2+x} dx$$

$$(e) \int_0^1 \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx \text{ (ヒント } t = x + \sqrt{1+x^2} \text{ とおき、} x \text{ を } t \text{ で表す。)}$$

$$(f) \int_a^b (x-a)(x-b) dx$$

$$(g) \int_a^b (x-a)(x-b)^2 dx$$

8. 次の曲線を x 軸の回りに回転してできる立体の体積を求めよ。

$$(a) y = 2 - x^2 \quad (-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2})$$

$$(b) y = \cos x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

$$(c) y = \sqrt{x}e^{-x} \quad (0 \leq x \leq \log 2)$$

9. $y = x^2$ と $y = \sqrt{x}$ で囲まれた図形を x 軸の回りに回転させてできる立体の体積を求めよ。