第1章　離散時間確率過程

ルーレットやさいころの目の出方，株価や競馬など、世の中には結果が予測できない現象がたくさん有る．これらを我々が知らないランダムなパラメータが含まれている時系列と考えて見るのが確率過程の理論である．我々に分かるのは個々のパラメータのどれが実現しているかではなく，パラメータの選ばれる確率法則だけであると考える．

どのパラメータが現れるかはそのパラメータを選んだ神様だけが知っている．

1.1　確率空間，確率変数，分布，期待値

最初に確率空間を導入する．標本空間 Ω が与えられているものとする． Ω としてイメージするときはできるだけ大きな集合（例えば森羅万象全体）をイメージしておく方が都合がいい．しかし，数学として扱うときには必要最小限なものが都合がよい．とにかく Ω が標本空間として与えられているものとする．

定義 1.1（ σ-加法族 ）
Ω の部分集合からなる集合族 $\mathcal{F}$ が Ω の σ-**加法族**であるとは，

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c = \{\omega \in \Omega\ ;\ \omega \notin A\} \in \mathcal{F}$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ ならば $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$.

の３つの条件を $\mathcal{F}$ がみたすときにいう．

例 1.1　(i) Ω が有限集合のとき，$\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$ *(*Ω の部分集合の全体*)* は σ 加法族である．

(ii) Ω が実数全体 $\mathbb{R}$ のとき，

$$\mathcal{C} = \{(-\infty, a];\ a \in \mathbb{R}\}$$

を含む最小の σ-加法族を $\mathbb{R}$ の *Borel* σ-加法族（または 簡単に *Borel* 集合族 ）といい，その要素を *Borel* 集合と呼ぶ．開集合、閉集合は *Borel* 集合である．$\mathbb{R}$ の *Borel* σ-加法族を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ と書くことにする．

練習問題 1.1 $\Omega = \mathbb{R}$ のとき， 上の $\mathcal{C}$ に対して

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{F};\ \mathcal{F}\ \text{は}\ \mathcal{C}\ \text{を含む}\ \mathbb{R}\ \text{の}\ \sigma\text{-加法族}\ \}$$

とおくと、これが $\mathbb{R}$ の *Borel* σ-加法族であることを証明せよ．

標本空間の集合（これを**事象**とよぶ.）のうち，確率を測ることができる事象の全体が σ-加法族になっているものと考えることにより，(測度論的）確率論がはじまる．

定義 1.2（確率測度 ）
Ω と，その σ-加法族 $\mathcal{F}$ が与えられているとき，$\mathcal{F}$ 上の実数値関数 P が，

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，$0 \le P(A) \le 1$.

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が，$n \neq m$ のとき $A_n \cap A_m = \emptyset$ を常に満たすならば，

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \qquad (\sigma\text{-加法性})$$

の３つの条件を満たすとき，$\mathcal{F}$ 上の確率測度という．

組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を**確率空間**という．

練習問題 1.2 $\{A_n\}_{n\ge1}$ が単調増加のとき，つまり任意の n に対して $A_n \subset A_{n+1}$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

また $\{A_n\}_{n\geq 1}$ が単調減少のとき，つまり任意の n に対して $A_n \supset A_{n+1}$ となるとき，

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

となることを証明せよ．

定義 1.3 (**確率変数**)
写像 $X:\Omega \to \mathbb{R}$ が，任意の 1 次元ボレル集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$X^{-1}(B) = \{\omega\ ;\ X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \tag{1.1}$$

を満たすとき，**確率変数** という．X が $\mathbb{R}^d$ に値を取り，任意の d 次元ボレル集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して (1.1) を満たすとき，d **次元確率変数**という．

練習問題 1.3 確率変数の線形結合，積，商は（ただし分母は 0 にならないとして），また確率変数になる事を示せ．さらに $X_n, n=1,\dots$ が確率変数の時，$\sup_{n\geq 1} X_n$ および $\inf_{n\geq 1} X_n$ も確率変数となることを示せ．（ただし $\pm\infty$ の値も許す確率変数として）

練習問題 1.4 $f(x)$ がボレル可測関数のとき，確率変数 X に対して

$$Y(\omega) = f(X(\omega))$$

と定義すると Y は確率変数である事を示せ．

定義 1.4 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された確率変数 X が有る時，次のようにして実数空間 $\mathbb{R}$ 上の確率 μ_X が定義できる．

$$\mu_X(A) := P(\{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \in A\})$$

A は任意のボレル集合でよい．μ_X を X の **分布**と呼ぶ．また，A として特に $A = (-\infty, x]$ ととると

$$F_X(x) = \mu_X((-\infty, x])$$

は，実数 x の関数となるが，これを X の**分布関数**という．分布関数と分布は 1 対 1 に対応している事が知られている．

練習問題 1.5 μ_X が $\mathbb{R}$ のボレル集合族上の確率になっている事を確かめよ．

練習問題 1.6 分布関数 F_X は以下の性質を持つ事を確かめよ．

(i) F_X は単調非減少関数である．

(ii) F_X は右連続である．つまり任意の $x \in \mathbb{R}$ 対し，

$$\lim_{h \searrow 0} F_X(x+h) = F_X(x).$$

(iii) $\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1.$

定義 1.5 (**期待値**) 確率変数 X の**期待値** EX は次の 3 段階で定義する．

(i) X が有限個の値 $\{a_1, \dots, a_m\}$ しかとらない場合：

$$EX = \sum_{j=1}^{m} a_j P\left(X = a_j\right)$$

(ii) X が非負の値のみをとる場合：

$$EX = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n^2} \frac{j}{n} P\left(\frac{j}{n} \leq X < \frac{j+1}{n}\right)$$

このとき，$EX < \infty$ ならば X は**可積分**という．

(iii) 一般の場合：

$X^+ = \max\{X, 0\}, \quad X^- = \max\{-X, 0\}$ とおくと $X^+, X^- \geq 0$ で $X = X^+ - X^-$ である．これに対して X^+, X^- がともに可積分ならば X は**可積分**であるといい、

$$EX = EX^+ - EX^-$$

によって定義する．

期待値 EX は積分と同じ性質を持つ．しばしば

$$EX = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega)$$