練習問題 1.5 μ_X が $\mathbb{R}$ のボレル集合族上の確率になっている事を確かめよ．

練習問題 1.6 分布関数 F_X は以下の性質を持つ事を確かめよ．

(i) F_X は単調非減少関数である．

(ii) F_X は右連続である．つまり任意の $x \in \mathbb{R}$ 対し，

$$\lim_{h \searrow 0} F_X(x+h) = F_X(x).$$

(iii) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1.$

定義 1.5 (**期待値**) 確率変数 X の**期待値** EX は次の 3 段階で定義する．

(i) X が有限個の値 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ しかとらない場合：

$$EX = \sum_{j=1}^{m} a_j P(X = a_j)$$

(ii) X が非負の値のみをとる場合：

$$EX = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n^2} \frac{j}{n} P\left(\frac{j}{n} \le X < \frac{j+1}{n}\right)$$

このとき，$EX < \infty$ ならば X は**可積分**という．

(iii) 一般の場合：

$X^+ = \max\{X, 0\}, \quad X^- = \max\{-X, 0\}$ とおくと $X^+, X^- \ge 0$ で $X = X^+ - X^-$ である．これに対して X^+, X^- がともに可積分ならば X は**可積分**であるといい、

$$EX = EX^+ - EX^-$$

によって定義する．

期待値 EX は積分と同じ性質を持つ．しばしば

$$EX = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega)$$

とも書かれる．事象 A の上での期待値 $E(X\,;\,A)$ は事象 A の指示関数

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \omega \in A, \\ 0, & \text{if} \quad \omega \notin A \end{cases}$$

を使うと

$$E(X\,;\,A) = \int_A X(\omega) P(d\omega) = E(X 1_A)$$

と定義できる．分布を使うと

$$E(X\,;\,\{X \in [a,b]\}) = \int_a^b x \; \mu_X(dx)$$

とも表す事ができる．

期待値について，ルベーグ積分の諸定理（収束定理など）が成り立つ．

1.2　増大する σ 加法族の列と停止時刻

1.2.1　フィルトレーションと適合性

サイコロ勝負，ルーレット，競馬，株式市場など，多くの状況で予測できない出来事は時間とともに変化しながら続く．我々はこれまでの結果という情報を頼りに今後どうなっていくかを予想し，対策を考える．数学的にはこれは時間とともに増大する情報の族（σ-加法族の増大列）を考える事に対応する．以下ではこのような σ-加法族の増大列をひとつ与えて考える．

定義 1.6 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において，$\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の列 $\{\mathcal{F}_n\,;\,n \ge 0\}$ が増大列であるとは，任意の $n \ge 0$ に対して

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$$

が成り立つことをいう．

このような，$\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の増大列 $\{\mathcal{F}_n\,;\,n \ge 0\}$ をフィルトレーションと呼び，$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_n\})$ をフィルターつき確率空間ともいう．以下では常にフィルターつき確率空間を考える．

賭事をしていて，時刻 n での勝負の結果は時刻 n までにはわかる．時刻 n の勝負の前に使って良い情報は時刻 $n-1$ までの情報である．次の定義はこの様な制限を数学的に表すために用意する．

定義 1.7 確率変数の無限列 $\{X(n)\}$ を確率過程と呼ぶ．確率過程 $\{X_n\}$ がフィルトレーション $\{\mathcal{F}_n\ ;\ n \geq 0\}$ に対して **適合** である（ $\{\mathcal{F}_n\}$-適合）とは，任意の $n \geq 0$ に対して $X(n)$ は $\mathcal{F}_n$-可測である事をいう．

1.2.2　停止時刻

賭けをやっている時，いつゲームを止めるかというのが問題になる．無限に賭けを続けることは出来ないが，続ければ必ず破産する．したがっていつかは止めないといけないが，出来るだけ有利な止め方はないのだろうか？このことを数学的に問題にした時に**停止時刻**という概念が出てくる．

定義 1.8 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_n; n \geq 0\})$ をフィルターつき確率空間とする．

$$T : \Omega \to \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

が $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻であるとは，任意の $n \geq 0$ に対して

$$\{T \leq n\} = \{\omega \in \Omega; T(\omega) \leq n\}$$

が $\mathcal{F}_n$ の元となっている時にいう．

$T : \Omega \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ として T が無限大の値をとることを許す場合もある．

例 1.2 $T \equiv k$ （定数）のとき T は停止時刻である．
実際，

$$\{T \leq n\} = \begin{cases} \Omega & k \leq n \text{ のとき}, \\ \emptyset & k > n \text{ のとき} \end{cases}$$

なので，いずれの場合もこれは $\mathcal{F}$ に入る．

例 1.3 確率過程 $\{X(n)\}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-適合のとき，

$$T = \min\{n \geq 0; X(n) \geq A\}$$

ただし，いつまでも $X(n)$ が A 未満の時（右辺の集合が $\emptyset$ のとき）は $T = \infty$ と理解する．このとき T は $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻である．なぜなら，

$$\begin{aligned} \{T \leq n\} &= \{\exists k \leq n \textit{ such that } X(k) \geq A\} \\ &= \bigcup_{0 \leq k \leq n} \{X(k) \geq A\} \end{aligned}$$

最後の式の $\{X(k) \geq A\}$ は適合性から $\mathcal{F}_k$ の元なので $k \leq n$ のとき $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ となり上式右辺は $\mathcal{F}_n$ の要素である．

定理 1.1 $T_k, k \geq 1$ がすべて $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻のとき，

$$T_1 \vee T_2, \quad T_1 \wedge T_2, \quad T_1 + T_2, \quad \sup_{k \geq 1} T_k, \quad \inf_{k \geq 1} T_k$$

はすべて $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻．

補題 1.2 T が $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻であることと次の条件は同値

$$\text{任意の } n \geq 0 \text{ に対して } \{T = n\} \in \mathcal{F}_n. \tag{1.2}$$

証明　T が $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻であるとすると，

$$\{T = n\} = \{T \leq n\} \setminus \{T \leq n - 1\} \in \mathcal{F}_n$$

となり確かに (1.2) が成り立つ．逆に (1.2) が成り立つとすると，任意の $n \geq 0$ に対し，

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{T = k\} \in \mathcal{F}_n$$

となり確かに T は $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻である．

□

定理 1.1 の証明　$T_1 \vee T_2 = \max\{T_1, T_2\}$ であるので，

$$\{T_1 \vee T_2 \leq n\} = \{T_1 \leq n\} \cap \{T_2 \leq n\}$$

となり，T_1, T_2 それぞれが $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻であるので右辺は $\mathcal{F}_n$ の元になる．
$T_1 \wedge T_2 = \min\{T_1, T_2\}$ なので，

$$\{T_1 \wedge T_2 \leq n\} = \{T_1 \leq n\} \cup \{T_2 \leq n\}$$

となり，やはり右辺は $\mathcal{F}_n$ の元になる．

$$\{\sup_{k \geq 1} T_k \leq n\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{T_k \leq n\}$$

となり，各 T_k が $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻であるので，やはり右辺は $\mathcal{F}_n$ の元になる．

$$\{\inf_{k\geq 1} T_k \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{T_k \leq n\}$$

となり，やはり右辺は $\mathcal{F}_n$ の元になる．

最後に $T_1 + T_2$ だが，これは補題を使おう．

$$\{T_1 + T_2 = n\} = \bigcup_{k=0}^{n}\{T_1 = k\} \cap \{T_2 = n-k\}$$

だから，やはり右辺は $\mathcal{F}_n$ の元になる．

□

最後のフィーバー

パチンコをやっているとき，フィーバーがはじまったときに「このフィーバーが終わったら止めよう」と思える人は意志の強い人だ．だれもが「これが最後のフィーバー」と分かっていたらそう思うのだが．ところが，この最後のフィーバーが起きる時刻というのはそれまでの出来事だけではわからない．未来を含む概念である．したがって最後のフィーバーが起きる時刻は $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻にはなりえない．数学的には次のような例がある．

例 1.4 $X(n)$ を $\{\mathcal{F}_n\}$-適合な確率過程とする．B を *Borel* 集合として，

$$U = \max\{n \geq 0; X(n) \in B\}$$

とすると，U は $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻ではない．なぜなら

$$\{U = n\} = \{X(n) \in B\} \cap \bigcap_{k=1}^{\infty}\{X(n+k) \notin B\}$$

となり，右辺は $\mathcal{F}_n$ の元になっていない．

停止時刻の σ-加法族

T を $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻とするとき、$\mathcal{F}$ の部分集合族 $\mathcal{F}_T$ を

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \;:\; \text{任意の } n \geq 0 \text{ に対し } \{T \leq n\} \cap A \in \mathcal{F}_n \text{ が成立 }\}$$

とおくとこれは σ-加法族になる。これは時刻 T までの出来事の情報といわれる。

練習問題 1.7 $\mathcal{F}_T$ が σ-加法族になることを確かめよ。