**$\sigma$-加法族 $\mathcal{F}_T$ に関する補足**

**補題 1.3** $T, S$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻のとき、

$$\mathcal{F}_{T\wedge S} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$$

**証明** $A \in \mathcal{F}_{T\wedge S}$ とすると、任意の $n \geq 0$ に対して

$$A \cap \{T \leq n\} = \big(A \cap \{T \leq n\} \cap \{S \leq n\}\big) \cup \big(A \cap \{T \leq n\} \cap \{S > n\}\big)$$

であり、

$$A \cap \{T \leq n\} \cap \{S \leq n\} = A \cap \{T \wedge S \leq n\} \cap \{T \leq n\}\{S \leq n\}$$

とかくと、$A \in \mathcal{F}_{T\wedge S}$ と $T, S$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻であることより、$A \cap \{T \wedge S \leq n\}, \{T \leq n\}, \{S \leq n\}$ はすべて $\mathcal{F}_n$ の元であり、

$$A \cap \{T \leq n\} \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

また、

$$A \cap \{T \leq n\} \cap \{S > n\} = A \cap \{T \wedge S \leq n\} \cap \{T \leq n\}\{S > n\}$$

とかけ、$\{S > n\} = \{S \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$ なので、

$$A \cap \{T \leq n\} \cap \{S > n\} \in \mathcal{F}_n$$

となり、$A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ がわかり、$A \in \mathcal{F}_T$ となる。$A \in \mathcal{F}_S$ も同様に示せる。したがって、

$$\mathcal{F}_{T\wedge S} \subset \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$$

一方、$A \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$ とするとき、

$$A \cap \{T \wedge S \leq n\} = A \cap \{T \leq n\} \cap \{S \leq n\}$$

なので、右辺は $\mathcal{F}_n$ に属する。よって $A \in \mathcal{F}_{T\wedge S}$ つまり、

$$\mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{T\wedge S}$$

となり、等式が証明できた。 □

**系 1.4** $T, S$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻で、$T \geq S$ *a.e.* ならば、$\mathcal{F}_T \supset \mathcal{F}_S$



## 1.3 条件つき期待値

たとえば、競馬でよく「今日は雨だから重馬場になる。この馬に有利だ」とか、パチンコで「あそこのパチンコ屋は右から 3 列目の奥から 3 番目の台がよく出る。」とかいう。つまり、賭事にはそのときの条件によって、結果の出る確率がかわることを体験的にギャンブラー達は知っている。このときの情報を基にしてギャンブルを行えば、得られる賞金の期待値も増えることを知っている。直観的にはこれが**条件つき期待値**の考え方である。

まず、$P(A) > 0$ となる事象が起きるという条件付きの確率について考える。これは

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

によって定義される。たとえば、 $X$ が有限個の値をとる確率変数のとき、$A$ が起きるという条件付きで期待値を考えると、

$$E[X \mid A] = \sum_x x P(X = x \mid A)$$

とすれば、$A$ が起きるという条件付きで期待値が求められる。$A$ が変わるとこの値も変化する。

時刻 $n$ までの情報が与えられているとき、そのすべてを使って次に起こることを予測したい。そうすると分かっているのは $\sigma$-加法族 $\mathcal{F}_n$ についてのすべての情報である。これをうまく使う方法を考える。

- 定義したいのは $E[X \mid \mathcal{F}_n]$.
- これは、時刻 $n$ までの情報が変われば違う値をとるはず。—ランダム!
- $\mathcal{F}_n$ 以外の情報は使わない — $\mathcal{F}_n$-可測!
- $A \in \mathcal{F}_n$ のとき、

$$\int_A E[X \mid \mathcal{F}_n](\omega) P(d\omega) = \int_A X(\omega) P(d\omega) \tag{1.3}$$

　これは $E[\{E[X \mid \mathcal{F}_n]\}; A] = E[X; A]$ とも書ける。

最後の条件は直観的ではないが、Radon-Nikodym の定理により、$\mathcal{F}_n$-可測な確率変数 $Y$ で

$$\int_A Y(\omega) P(d\omega) = \int_A X(\omega) P(d\omega)$$

が任意の $A \in \mathcal{F}_n$ に対して成り立つものが「唯一つ」あることが知られている。($P(X \neq Y) = 0$ のとき $X$ と $Y$ は同じものとみなすという意味で唯一つである）これを $E[X \mid \mathcal{F}_n]$ と書く。(1.3) を $\mathcal{F}_n$ での条件付きの $X$ の条件付き期待値 $E[X \mid \mathcal{F}_n]$ の定義式と考える。

条件付き期待値は任意の $\mathcal{F}$ の部分 $\sigma$-加法族 $\mathcal{G}$ に対しても同じように定義できる。

**定義 1.9** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 $\sigma$-加法族とする。$X$ を可積分な確率変数とするとき、$X$ の $\mathcal{G}$ による**条件付き期待値** $E[X \mid \mathcal{G}]$ とは、

(1) $E[X \mid \mathcal{G}]$ は $\mathcal{G}$-可測、

(2) 任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して (1.3) 式が成り立つ

の２条件を満たすもののことである。

**条件付き期待値の性質**

**定理 1.5** (tower property) $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ を $\mathcal{F}$ の部分 $\sigma$-加法族で $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ とし、$X$ を可積分な確率変数とするとき、

$$E[\{E[X \mid \mathcal{G}]\} \mid \mathcal{H}] = E[X \mid \mathcal{H}] \quad a.e.$$

**証明** 問題の式の両辺は定義から $\mathcal{H}$-可測なので、任意の $A \in \mathcal{H}$ に対して

$$\int_A E[X \mid \mathcal{G}](\omega) P(d\omega) = \int_A X(\omega) P(d\omega)$$

という式を示せばよい。しかし、$A \in \mathcal{H}$ のとき $A \in \mathcal{G}$ だから、$E[X \mid \mathcal{G}]$ の定義からこの式は成り立っている。 □

**定理 1.6** $\mathcal{G}$ は $\mathcal{F}$ の部分 $\sigma$-加法族で、$X, Y$ を可積分な確率変数とするとき、

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ のとき、

$$E[aX + bY \mid \mathcal{G}](\omega) = aE[X \mid \mathcal{G}](\omega) + bE[Y \mid \mathcal{G}](\omega) \quad a.e.$$

(2) $X(\omega) \geq Y(\omega) \quad a.e.$ ならば $E[x \mid \mathcal{G}](\omega) \geq E[Y \mid \mathcal{G}](\omega) \quad a.e.$



**証明** (1) 両辺 $\mathcal{G}$-可測なので、証明するべき式は $A \in \mathcal{G}$ のとき、

$$\int_A (aE[X \mid \mathcal{G}](\omega) + bE[Y \mid \mathcal{G}](\omega)) P(d\omega) = \int_A \{aX(\omega) + bY(\omega)\} P(d\omega)$$

で、

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= a \int_A E[X \mid \mathcal{G}](\omega) P(d\omega) + b \int_A E[Y \mid \mathcal{G}])(\omega) P(d\omega) \\
&= a \int_A X(\omega) P(d\omega) + b \int_A Y(\omega) P(d\omega) \\
&\quad (\because \text{ 条件付き平均の定義の式 (1.3) から }) \\
&= \int_A \{aX(\omega) + bY(\omega)\} P(d\omega).
\end{aligned}$$

(2) これは (1) の線形性が示せているので、

$$\int_A \{E[X \mid \mathcal{G}](\omega) - E[Y \mid \mathcal{G}](\omega)\} P(d\omega) \geq 0$$

が任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して成り立つことを言えばいい。

( $\because$ もし、これがいえていれば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$A = \{\omega \ : \ E[X \mid \mathcal{G}](\omega) - E[Y \mid \mathcal{G}](\omega) \leq -\varepsilon\}$$

としてみると、上の式の左辺は

$$-\varepsilon P(A) \leq 0$$

より大きくないから、これが 0 以上であるのは $P(A) = 0$ つまり、

$$E[X \mid \mathcal{G}](\omega) - E[Y \mid \mathcal{G}](\omega) > -\varepsilon \quad a.e.$$

のときのみ。$\varepsilon > 0$ は任意なので、これから

$$E[X \mid \mathcal{G}](\omega) - E[Y \mid \mathcal{G}](\omega) \geq 0 \quad a.e.$$

となる。)

条件付き期待値の性質から

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int_A X(\omega) P(d\omega) - \int_A Y(\omega) P(d\omega) \\
&= \int_A \{X(\omega) - Y(\omega)\} P(d\omega) \geq 0.
\end{aligned}$$