定理 1.7 (条件付き収束定理)
以下では、$(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$ を確率空間とし、$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とする。

(1) (条件付き単調収束定理)
非負の確率変数列 $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ が単調増加して確率変数に a.e. で収束するとき、

$$\lim_{n\to\infty} E[Y_n \mid \mathcal{G}] = E[Y \mid \mathcal{G}]$$

(2) (条件付き Fatou の補題)
非負の確率変数列 $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ に対して

$$\liminf_{n\to\infty} E[Y_n \mid \mathcal{G}] \geq E[\liminf_{n\to\infty} Y_n \mid \mathcal{G}]$$

(3) (条件付き Lebesgue の優収束定理)
$n \to \infty$ のときに $Y_n \to Y$ *a.e.* が成り立っており、かつ、Z を可積分な確率変数として、$|Y_n| \leq Z$ *a.e.* が任意の $n \geq 1$ について成り立つなら、

$$\lim_{n\to\infty} E[Y_n \mid \mathcal{G}] = E[Y \mid \mathcal{G}]$$

証明 (1) 定理 1.6 により、$E[Y_n \mid \mathcal{G}] \leq E[Y_{n+1} \mid \mathcal{G}]$ *a.e.* が成り立つので、単調増加列 $\{E[Y_n \mid \mathcal{G}]\}$ は *a.e.* で極限を持つ。この極限を $Z(\omega)$ と書く。途中が $\mathcal{G}$-可測なので、$Z(\omega)$ も $\mathcal{G}$-可測。また、条件つき期待値の性質から、任意の $A \in \mathcal{G}$ について

$$\int_A E[Y_n \mid \mathcal{G}](\omega) P(d\omega) = \int_A Y_n(\omega) P(d\omega)$$

なので、普通の単調収束定理から左辺は

$$\int_A Z(\omega) P(d\omega)$$

に収束し、右辺は

$$\int_A Y(\omega) P(d\omega)$$

に収束するので、

$$\int_A Z(\omega) P(d\omega) = \int_A Y(\Omega) P(d\omega)$$

これは

$$Z = E[Y \mid \mathcal{G}]$$

を意味している。
(2) 定理 1.6 により、$n \geq k$ のとき

$$E[\inf_{n\geq k} Y_n \mid \mathcal{G}] \leq E[Y_n \mid \mathcal{G}] \quad a.e.$$

右辺の $n \geq k$ に関する下限をとって

$$E[\inf_{n\geq k} Y_n \mid \mathcal{G}] \leq \inf_{n\geq k} E[Y_n \mid \mathcal{G}]$$

$k \to \infty$ のとき、左辺は条件付きの単調収束定理により

$$E[\liminf_{n\to\infty} Y_n \mid \mathcal{G}]$$

に収束するので

$$E[\inf_{n\geq k} Y_n \mid \mathcal{G}] \leq \liminf_{n\geq k} E[Y_n \mid \mathcal{G}]$$

が得られる。
(3) 今度は条件付き Fatou の補題を使って普通の優収束定理を証明するのと同じ手順で証明する。$G_n(\omega) = Z(\omega) + Y_n(\omega), \quad H_n(\omega) = Z(\omega) - Y_n(\omega)$ とおくと、$G_n, H_n \geq 0$ なので、条件付き Fatou の補題から

$$\liminf_{n\to\infty} E[G_n \mid \mathcal{G}] \geq E[\liminf_{n\to\infty} G_n \mid \mathcal{G}]$$

左辺は $E[Z \mid \mathcal{G}] + \liminf_{n\to\infty} E[Y_n \mid \mathcal{G}]$ に等しく、右辺は $E[Z \mid \mathcal{G}] + E[\liminf_{n\to\infty} Y_n \mid \mathcal{G}]$ に等しいので、整理して

$$\liminf_{n\to\infty} E[Y_n \mid \mathcal{G}] \geq E \liminf_{n\to\infty} Y_n \mid \mathcal{G}] \tag{1.4}$$

また、H_n に関する条件付き Fatou の補題から

$$\limsup_{n\to\infty} E[Y_n \mid \mathcal{G}] \leq E[\limsup_{n\to\infty} Y_n \mid \mathcal{G}] \tag{1.5}$$

となり、(1.4),(1.5) をあわせて

$$E[Y \mid \mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} E[Y_n \mid \mathcal{G}]$$

が得られる。 □

定理 1.8 Y が有界で $\mathcal{G}$-可測ならば

$$E[XY \mid \mathcal{G}](\omega) = Y(\omega)E[X \mid \mathcal{G}](\omega) \quad a.e..$$

証明 $X, Y \geq 0$ で証明できれば、一般の場合は

$$X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\}, \quad X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\}$$

とし、$X = X^+ - X^-$ であること、および、Y についても同様に Y^+, Y^- を使って、$Y = Y^+ - Y^-$ なので、

$$\begin{aligned}
E[XY \mid \mathcal{G}] &= E[(X^+ - X^-)(Y^+ - Y^-) \mid \mathcal{G}] \\
&= E[X^+Y^+ \mid \mathcal{G}] - E[X^+Y^- \mid \mathcal{G}] \\
&\quad - E[X^-Y^+ \mid \mathcal{G}] + E[X^-Y^- \mid \mathcal{G}] \\
&= Y^+E[X^+ - X^- \mid \mathcal{G}] - Y^-E[X^+ - X^- \mid \mathcal{G}] \\
&= Y[X \mid \mathcal{G}] \quad a.e.
\end{aligned}$$

と示すことができる。

$X, Y \geq 0$ のときは

$$Y_n(\omega) = \frac{k}{2^n} \quad \text{if } \frac{k}{2^n} \leq Y(\omega) < \frac{k+1}{2^n}$$

と定めると、Y が有界だったので、$Y_n(\omega)$ は有限個の値をとる。したがって、この場合に証明できていれば、

$$E[XY_n \mid \mathcal{G}] = Y_nE[X \mid \mathcal{G}]$$

がいえる。$0 \leq XY_n \nearrow XY$ かつ $0 \leq Y_n \nearrow Y$ より、条件つき単調収束定理が使えて、上式で $n \to \infty$ とすると、

$$E[XY \mid \mathcal{G}] = YE[X \mid \mathcal{G}] \quad a.e.$$

最後に Y が有限個の値をとるときは、

$$Y(\omega) = \sum_{j=1}^{n} y_j 1_{\{Y = y_j\}}(\omega)$$

と書くことができ、$A_j = \{Y = y_j\} \in \mathcal{G}$ とおくと、

$$E[XY \mid \mathcal{G}] = \sum_{j=1}^{n} y_j E[X1_{A_j} \mid \mathcal{G}]$$

ところで、

$$E[X1_{A_j} \mid \mathcal{G}] = 1_{A_j}E[X \mid \mathcal{G}]$$

を示すことは条件付き期待値の定義の式 (1.3) から任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して

$$\int_A X(\omega)1_{A_j}(\omega)P(d\omega) = \int_A 1_{A_j}(\omega)E[X \mid \mathcal{G}](\omega)P(d\omega)$$

をいえば良い。

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \int_{A \cap A_j} E[X \mid \mathcal{G}](\omega)P(d\omega) = \int_{A \cap A_j} X(\omega)P(d\omega) \\
&= \int_A X(\omega)1_{A_j}(\omega)P(d\omega) = \text{左辺}
\end{aligned}$$

したがって、

$$E[XY \mid \mathcal{G}] = \sum_{j=1}^{n} y_j E[X1_{A_j} \mid \mathcal{G}] = \sum_{j=1}^{n} y_j 1_{A_j} E[X \mid \mathcal{G}] = YE[X \mid \mathcal{G}]$$

となり、求める式がでた。 □

定理 1.9 (条件つき Jensen の不等式)

$\varphi(x)$ を凸関数[1]、X を X と $\varphi(X)$ が可積分な確率変数とする。$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とするとき、

$$\varphi\big(E(X \mid \mathcal{G})\big) \leq E\big(\varphi(X) \mid \mathcal{G}\big)$$

証明 $\varphi(x)$ が凸関数なので、任意の a に対し

$$\varphi(x) \geq \varphi'_+(a)(x-a) + \varphi(a)$$

が成り立っている。$\varphi'_+(a)$ は φ の a での右微分。ここで、$a = E[X \mid \mathcal{G}]$、および $x = X(\omega)$ を代入すると、$\varphi'_+(E[X \mid \mathcal{G}])$ は $\mathcal{G}$-可測で

$$\varphi\big(X(\omega)\big) \geq \varphi\big(E[X \mid \mathcal{G}]\big) \cdot \big(X(\omega) - E[X \mid \mathcal{G}]\big) + \varphi\big(E[X \mid \mathcal{G}]\big)$$

ここで両辺の $\mathcal{G}$ のよる条件つき期待値をとると、

$$E\big[\varphi(X)\big|\mathcal{G}\big] \geq \varphi\big(E[X \mid \mathcal{G}]\big)$$

□

[1] $\varphi(x)$ としては $|x|^p$, $p \geq 1$ が良くとられる。