練習問題 1.8 $\xi_n, S_n, \mathcal{F}_n$ を上の例 1.5 と同じようにとり、$\alpha > 0$ のとき、

$$V_n = e^{\alpha n} S_n$$

とおくと、V_n が $\mathcal{F}_n$-劣マルチンゲールになることを示し、このときの Doob 分解の M_n, A_n を求めよ。

1.5 任意抽出定理

この節で紹介する Doob の任意抽出定理は、
「公平な賭けには必勝法は存在しない」
ことを数学的に表したものとして有名な定理である。実際にはいつでも有効な勝ち逃げの方法はないことを表した定理である。

フィルトレーション $\{\mathcal{F}_n\}$ は各 $\mathcal{F}_n$ が P-null sets をすべて含むものとしておく。

補題 1.14 T を確率 1 で有限な $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻とし、$\{X_n\}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$-適合な確率過程とする。このとき、$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$ で定まる確率変数は $\mathcal{F}_T$-可測である。

証明 $X_T(\omega)$ は確率 1 の ω に対して well-defined. 残りでは 0 と定義しておけば全体で定義できている。任意の実数 a に対して $\{X_T \le a\} \in \mathcal{F}_T$ を示せば良い。

$$\{X_T \le a\} \cap \{T \le n\} = \bigcup_{j=0}^{n} \{X_T \le a\} \cap \{T = j\}$$

なので、任意の $0 \le j \le n$ に対して

$$\{X_T \le a\} \cap \{T = j\} \in \mathcal{F}_j$$

を示せば十分。ところが、

$$\{X_T \le a\} \cap \{T = j\} = \{X_j \le a\} \cap \{T = j\} \in \mathcal{F}_j$$

となり、証明できた。 □

定理 1.15 T, S を $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻とし、$T \le N \quad a.e.$ となる自然数 N が存在するとする。このとき以下が成立する。

(i) M_n が $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールのとき、

$$E[M_T \mid \mathcal{F}_S] = M_{T \wedge S} \quad a.e.$$

(ii) X_n が $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールのとき、

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_S] \ge X_{T \wedge S} \quad a.e.$$

証明 M_n が $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールならば $M_n, -M_n$ ともに $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールとなるので、(ii) が示されていればよい。まず、

$$E[|X_T|] = \sum_{j=0}^{N} E[|X_j| : T = j] \le \sum_{j=0}^{N} E[|X_j|] < \infty$$

なので、$|X_T|$ は可積分。補題 1.3 と補題 1.14 から $X_{T \wedge S}$ は $\mathcal{F}_S$-可測であるので、求める不等式を示すには、任意の $A \in \mathcal{F}_S$ に対して

$$\int_A X_T(\omega) P(d\omega) \ge \int_A X_{T \wedge S}(\omega) P(d\omega) \tag{1.8}$$

を言っておけば良い。(左辺は $E[X_T \mid \mathcal{F}_S]$ の A 上での積分に等しい。)

$A \in \mathcal{F}_S$ とする。このとき

$$\int_A X_T(\omega) P(d\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A \cap \{S=k\}} X_T(\omega) P(d\omega)$$

と分解しておく。$k \ge N$ のとき、$T = T \wedge S$ なので、

$$\int_{A \cap \{S=k\}} X_T(\omega) P(d\omega) = \int_{A \cap \{S=k\}} X_{T \wedge S}(\omega) P(d\omega)$$

となる。

$k < N$ のときを考える。

$$\begin{aligned} \int_{A \cap \{S=k\}} X_T(\omega) P(d\omega) &= \int_{A \cap \{S=k\} \cap \{T \le k\}} X_{T \wedge S}(\omega) P(d\omega) \\ &\quad + \int_{A \cap \{S=k\} \cap \{T > k\}} X_T(\omega) P(d\omega) \end{aligned} \tag{1.9}$$

とすると、第 2 項について

$$\int_{A \cap \{S=k\} \cap \{T > k\}} X_{T \wedge (N-1)}(\omega) P(d\omega)$$

以上であることを示す。

$$\int_{A\cap\{S=k\}\cap\{T>k\}} X_{T\wedge(N-1)}(\omega)P(d\omega) = \int_{A\cap\{S=k\}\cap\{T>N-1\}} X_T(\omega)P(d\omega) + \int_{A\cap\{S=k\}\cap\{k<T\leq N-1\}} X_T(\omega)P(d\omega)$$

$T \leq N$ $a.e.$ なので、$\{T > N-1\} = \{T \leq N-1\}^c \in \mathcal{F}_{N-1}$ 上では $T = N$ であり、$X_T = X_N$ となり、$A \cap \{S = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{N-1}$ とあわせると、劣マルチンゲール性より

$$\int_{A\cap\{S=k\}\cap\{T>N-1\}} X_T(\omega)P(d\omega) = \int_{A\cap\{S=k\}\cap\{T>N-1\}} X_N(\omega)P(d\omega) \geq \int_{A\cap\{S=k\}\cap\{T>N-1\}} X_{N-1}P(d\omega)$$

したがって、

$$\int_{A\cap\{S=k\}\cap\{T>k\}} X_{T\wedge(N-1)}(\omega)P(d\omega) \geq \int_{A\cap\{S=k\}\cap\{T>k\}} X_{T\wedge(N-1)}(\omega)P(d\omega)$$

$k = N-1$ のときは右辺は

$$\int_{A\cap\{S=N-1\}\cap\{T>N-1\}} X_{T\wedge S}(\omega)P(d\omega)$$

と書けている。$k < N-1$ のときは、$\{T > k\} = \{T > N-2\} \cup \{T \leq N-2\}$ と分けて $X_{T\wedge(N-1)}$ の積分を考えることにより、まえと同じようにして

$$\int_{A\cap\{S=k\}\cap\{T>k\}} X_{T\wedge N-1}(\omega)P(d\omega) \geq \int_{A\cap\{S=k\}\cap\{T>k\}} X_{T\wedge(N-2)}(\omega)P(d\omega)$$

と出来る。以下、繰り返して

$$\int_{A\cap\{S=k\}\cap\{T>k\}} X_T(\omega)P(d\omega) \geq \int_{A\cap\{S=k\}\cap\{T>k\}} X_{T\wedge k}(\omega)P(d\omega) = \int_{A\cap\{S=k\}\cap\{T>k\}} X_{T\wedge S}(\omega)P(d\omega) \quad (1.10)$$

を得る。(1.9),(1.10) により、

$$\int_{A\cap\{S=k\}} X_T(\omega)P(d\omega) \geq \int_{A\cap\{S=k\}} X_{T\wedge S}(\omega)P(d\omega)$$

が言えた。この式を k について和をとれば、(1.8) を得る。 □

注意 1.16 この定理で重要な仮定は $T \leq N$ すなわち $\mathcal{F}_n$-停止時刻 T は有界であることである。証明を見てもそのことが分かる。

系 1.17 S, T が $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻で、ある定数 N に対して $S \leq T \leq N$ $a.e.$ が成り立つならば、以下が成立する。

(i) M_n が $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールのとき、

$$E[M_T \mid \mathcal{F}_S] = M_S \quad a.e.$$

(ii) X_n が $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールのとき、

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_S] \geq X_S \quad a.e.$$

系 1.18 (停止過程) M_n が $\{\mathcal{F}_n\}$-（劣）マルチンゲールのとき、T が $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻ならば、$M_{T\wedge n}$ は $\{\mathcal{F}_{T\wedge n}\}$-（劣）マルチンゲールであり、また $\{\mathcal{F}_n\}$-（劣）マルチンゲールでもある。

証明 $T \wedge n$ は有界な $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻で $T \wedge n \geq T \wedge (n-1)$ であることから、系 1.17 より、M_n が $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールならば

$$E[M_{T\wedge n} \mid \mathcal{F}_{T\wedge(n-1)}] \geq M_{T\wedge(n-1)}$$

が成り立ち、マルチンゲールのときは等式になる。一方、$n-1$ は $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻でもあるので、定理 1.15 により M_n が $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールならば

$$E[M_{T\wedge n} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \geq M_{T\wedge n\wedge(n-1)} = M_{T\wedge(n-1)}$$

が成り立ち、マルチンゲールのときは等式になる。 □

定理 1.15 により、M_n が $\{\mathcal{F}_n\}$- マルチンゲールのとき、T を有界な $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻とすると tower property とマルチンゲール性により、

$$E[M_T] = E\big[E[M_T \mid \mathcal{F}_0]\big] = E[M_0]$$

が成り立つ。平均的にはどのような有界な $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻を用いても平均的には損も特もしない。