練習問題 1.9 $\xi_1, \xi_2, \ldots$ を独立同分布な確率変数列で、

$$P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$$

とする。このとき、

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

とおくと、これは $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ に対して $\mathcal{F}_n$-マルチンゲールになることは例 1.5 で見た。

$$T = \min\{n \geq 0 \ : \ S_n = 1\}$$

とおくと、これは $\mathcal{F}_n$-停止時刻であるが、任意の $n \geq 1$ に対して

$$P(T \geq n) > 0$$

であることを証明せよ。（つまり有界でない。）これが

$$1 = E[S_T] \neq E[S_0] = 0$$

となり、上の結果と違う理由である。

1.6 マルチンゲール変換と任意抽出定理再考

この節の内容は D. Williams 著 Probability with martingales による。ギャンブルを考えてみる。ゲームが続いているとき、第 n 回目のゲームが終わり、次にどう賭けるかをギャンブラーは決めなくてはいけない。使って良い情報はこれまでに起こったことに関する情報の全体 $\mathcal{F}_n$ である。次の回 $n+1$ 回目の賭け金 (steak) C_{n+1} はこうして $\mathcal{F}_n$-可測つまり、確率過程としてみたとき C_n は $\{\mathcal{F}_n\}$-可予測となる。X_n をギャンブラーが毎回 1 円づつ賭けたときの n 回目のゲーム終了時の所持金とすると、C_n で賭けたときの所持金 S_n は

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k(X_k - X_{k-1})$$

となる。この解析がこの節の目的。

簡単のため C_n は有界としておく。

定理 1.19（マルチンゲール変換）

C_n を有界な $\{\mathcal{F}_n\}$-可予測な確率過程とし、M_n を $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールとすると、

$$(C \circ M)_n = \sum_{k=1}^{n} C_k(M_k - M_{k-1})$$

は $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールになる。更に、C_n が 非負と仮定すると、X_n を $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールのとき、

$$(C \circ X)_n = \sum_{k=1}^{n} C_k(X_k - X_{k-1})$$

もまた $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールになる。$(C \circ M)$ や $(C \circ X)$ は C の M や X による**離散確率積分**とも呼ばれる。

証明

$(C \circ M)$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールであることだけ示す。$(C \circ X)$ についても同じように証明できる。$(C \circ M)$ の形から $\{\mathcal{F}_n\}$-適合性は明らか。また C が有界なので、$(C \circ M)$ の可積分性も明らか。マルチンゲール性だけを示せば良い。ところが、C は $\{\mathcal{F}_n\}$-可予測なので、定数扱いができる。つまり、定理 1.8 により

$$\begin{aligned}
E[(C \circ M)_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= E[\sum_{j=1}^{n} C_k(M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= E[C_n(M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] + \sum_{j=1}^{n-1} C_k(M_k - M_{k-1}) \\
&= C_n E[M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] + (C \circ M)_{n-1} \\
&= (C \circ M)_{n-1}
\end{aligned}$$

□

この定理を用いると、停止過程に関するマルチンゲール性である系 1.18 が言える。任意抽出定理でもっとも良く使われるのがこの形。

系 1.18 の証明

$$C_n := \begin{cases} 1 & T \geq n \text{ のとき} \\ 0 & T < n \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくと、$\{T \geq n\} = \{T > n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$ であることより、C_n は可予測であり、非負かつ有界。また、X_n を $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールとすると $\{T = m\}$ 上では $m \leq n$ のとき

$$(C \circ X)_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{\{T \geq k\}}(X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m}(X_k - X_{k-1}) = X_m = X_T$$

$m > n$ のときは

$$(C \circ X)_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{\{T \geq k\}}(X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1}) = X_n$$

したがって、$(C \circ X)$ は $X_{T \wedge n}$ となり、これが定理 1.19 から $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールとなることが分かる。 □

例 1.7 $\{\xi_n\}$ を独立、同分布確率変数列で

$$P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$$

となるものとする。$r \in \mathbb{R}$ に対して

$$e^{rS_n} = e^{r(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)}$$

について考えると、

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$$

のとき、独立性により

$$E[e^{rS_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = e^{rS_{n-1}} E[e^{r\xi_n}] = e^{rS_{n-1}} \cosh r$$

となる。そこで、

$$M_n = (\cosh r)^{-n} e^{rS_n}$$

とおくと、

$$E[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = (\cosh r)^{-n} E[e^{rS_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = (\cosh r)^{-(n-1)} e^{rS_{n-1}} = M_{n-1}$$

となり、M_n は $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールである。

$$T = \min\{n \geq 0 \ : \ S_n = 1\}$$

とおくと、T は $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻であるので、任意抽出定理により

$$M_{T \wedge n}$$

は $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールとなる。特に、

$$E[M_{T \wedge n}] = E[M_0] = 1$$

となるので、これから

$$E[(\cosh r)^{-T \wedge n} e^{rS_{T \wedge n}}] = 1 \tag{1.11}$$

となる。

$$S_{T \wedge n} \leq 1 \quad \text{より} \quad e^{rS_{T \wedge n}} \leq e^r$$

であるから、被積分関数 $(\cosh r)^{-T \wedge n} e^{rS_{T \wedge n}}$ は有界で、$n \to \infty$ のとき

$$(\cosh r)^{-T \wedge n} e^{rS_{T \wedge n}} \to (\cosh r)^{-T} 1_{\{T < \infty\}} e^r$$

となる。Lebesgue の優収束定理により、このとき (1.11) から

$$E[(\cosh r)^{-T} 1_{\{T < \infty\}}] = e^{-r} \tag{1.12}$$

がわかる。これから $r \to 0$ として

$$P(T < \infty) = 1$$

がわかる。したがって (1.12) にこれを代入すると

$$E[(\cosh r)^{-T}] = e^{-r}$$

ここで、$\lambda = \cosh r \geq 1$ とおくと、$e^{-r} = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$ となり、

$$E[\lambda^{-T}] = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} \tag{1.13}$$

という式を得る。これで T の分布が分かる。

練習問題 1.10 (1.13) 式右辺を λ^{-1} について Taylor 展開することにより T の分布つまり

$$P(T = n)$$

を求めよ。ただし、

$$E[\lambda^{-T}] = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} P(T = n)$$

であることに注意せよ。