1.7　マルチンゲールの収束定理

この節の目標は
「非負マルチンゲールは収束する」
という事実をもう少し一般的に証明することである。この節では Williams "Probability with martingales " の議論を紹介するため、優マルチンゲールが主役になる。

上向き横断数 (upcrossing number)
$\{\mathcal{F}_n\}$-適合な確率過程 $\{X_n\}$ に対して、実数 $a < b$ と自然数 N を任意に与えたとき、

$U_N(a,b) :=$ X_n が 時刻 N までに区間 $[a,b]$ を上向きに横切った回数

と定める。簡単に X_n の上向き横断数と呼ぼう。

定理 1.20 X_n が $\{\mathcal{F}_n\}$-優マルチンゲールのとき、$U_N(a,b)$ を X_n の上向き横断数とすると、

$$(b-a)E[U_N(a,b)] \le E[(X_N - a)_-]$$

証明最初に、$\mathcal{F}_n$-可予測過程 C_n を

$$C_n = \begin{cases} 1, & \text{ある } k \le n-1 \text{ に対し、} X_k \le a \text{ かつ} \\ & X_j \le b \text{ が } k \le j \le n-1 \text{ で成立} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定義する。(明らかに C_n は $\mathcal{F}_{n-1}$-可測。) $C_n \ge 0$ だから、マルチンゲール変換 $(C \circ X)_n$ もまた定理 1.19 の証明と同じようにして $\mathcal{F}_{n-1}$-優マルチンゲールになっている。ところで、C_n の作り方から

$$(C \circ X)_N \ge (b-a)U_N - (X_N - a)_-$$

となる。両辺の期待値をとると、$(C \circ X)_n$ の優マルチンゲール性から

$$E[(C \circ X)_N] \le E(C \circ X)_0] = 0$$

だから、

$$(b-a)E[U_N(a,b)] \le E[(X_N - a)_-]$$

がでてくる。　□

系 1.21 $\{X_n\}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-優マルチンゲールで

$$\sup_n E[|X_n|] < \infty \tag{1.14}$$

ならば、$U(a,b) = \lim_{N\to\infty} U_N(a,b)$ は可積分で

$$(b-a)E[U(a,b)] < |a| + \sup_n E[|X_n|]$$

とくに、$U(a,b)$ は確率 1 で有限。

証明　定理 1.20 と

$$(X_n - a)_- \le |X_n| + |a|$$

であることからわかる。　□

定理 1.22 (Doob の収束定理)
$\{X_n\}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$-優マルチンゲールとする。もし、

$$\sup_n E[|X_n|] < \infty$$

ならば、確率 1 で $\lim_{n\to\infty} X_n$ が存在する。また、任意の $n \ge 0$ で $X_n \ge 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} X_n$ が存在する。

前半を証明しよう。系 1.21 により、任意の (a,b) に対して $U(a,b) < \infty$ である確率は 1 。そうすると確率 1 ですべての 有理数の組 $\{p,q\}$ (ただし $p < q$) に対して X_n は有限回しか上向きに横切らない。これが起こるためには $X_n \to \infty$, $X_n \to -\infty$ または $\lim_{n\to\infty} X_n$ が存在するしかない。なぜなら、もし、

$$\liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n$$

ならば、この間に有理数の組 $p < q$ をはさむことができ、

$$U(p,q) = \infty$$

が起きるが、これは確率 0 でしか起こらない。
$\lim_{n\to\infty} X_n$ の値として $\pm\infty$ を許せばこのことは、確率 1 で

$$\lim_{n\to\infty} X_n := X_\infty$$

が存在することを言っている。ところが Fatou の補題より、

$$E[|X_\infty|] \leq \liminf_{n\to\infty} E[|X_n|] \leq \sup_n E[|X_n|] < \infty$$

より、X_∞ は確率 1 で有限なことが分かる。

後半は系 1.21 より、

$$(b-a)E[U_N(a,b)] \leq E[(X_N-a)_-] \leq |a| + E[(X_N)_-] = |a|$$

であるので、やはり $U(a,b)$ が確率 1 で有限なことが分かる。あとは前半と同様。 □

注意 1.23 (1.14) 式の条件があれば、$\{X_n\}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールのときも確率 1 で 有限な $\lim_{n\to\infty} X_n$ が存在する。これは $-X_n$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-優マルチンゲールになるから明らか。

例 1.8 (Kolmoforov の大数の法則)

$\{\xi_n\}_{\ngeq 0}$ を独立、同分布の確率変数列とし、

$$E[X_1] = 0, \quad E[X_1^2] = 1$$

とする。このとき、確率 1 で

$$\frac{1}{n}S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \xi_j$$

は 0 に収束する。

実際、$\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ に対し

$$M_n = \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j}{j}$$

を考えると、

$$E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n + \frac{1}{n+1}E[\xi_{n+1}] = M_n$$

となり、M_n は $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲール。

$$E[|M_n|]^2 \leq E[M_n^2] = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} < \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

より、条件 (1.14) が満たされているので Doob の収束定理から M_n は確率 1 で有限な確率変数 M_∞ に収束する。このとき、(Kronecker の補題により、)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}S_n &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n j\frac{\xi_j}{j} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n j(M_j - M_{j-1}) \\
&= M_n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} M_j \\
&\to M_\infty - M_\infty = 0
\end{aligned}$$

となり、大数の強法則が示された。