1.8 収束定理の応用：Branching process

Branching process は、生物群の絶滅のモデルとして良く知られている。もっとも、ある環境下では生物群の個体数が爆発して無限大になるモデルなので、応用範囲は限られるが、確率論の様々な分野で登場するモデルである。まず、モデルの説明から始めよう。

(i) 時刻 0: 最初の一匹のバクテリアがいる。（祖先）

(ii) 時刻 1: 最初のバクテリアはランダムな数の子どもを生み、死ぬ。(子ども達が第一世代) 第一世代のバクテリア数を $Z(1)$ と書く。

$\vdots$

(iii) 時刻 n: この前の第 $n-1$ 世代の子孫はそれぞれ独立に同じ確率法則で子どもを生み、死ぬ。

$\vdots$

子どもの生まれ方は世代によって変わらない分布 μ によって決まっているとするとき、第 n 世代の数 $Z(n)$ は第 $n-1$ 世代の数 $Z(n-1)$ を使って

$$Z(n) = \sum_{k=1}^{Z(n-1)} X_j$$

とかける。ただし、$X_1, \ldots, X_{Z(n-1)}$ は 独立、同分布な確率変数列で、$Z(1), \ldots Z(n-1)$ とも独立で、その分布は μ である。

$$p_0 = \mu(0) = P(Z(1) = 0), p_1 = \mu(1) = P(Z(1) = 1), \ldots, p_k = m(k) = P(Z(1) = k), \ldots$$

とかくとき、

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$$

は一匹のバクテリアが生むバクテリアの平均的な数を意味している。このとき、$Z(n-1) = N$ を知ったという条件付きで $Z(n)$ の条件付き期待値を求めてみよう。

$$E\left(Z(n) \mid Z(n=1) = N\right) = \sum_{j=1}^{N} E[X_j \mid Z(n-1) = N]$$

各 X_j は $Z(n-1)$ と独立なので

$$E[X_j \mid Z(n-1) = N] = E[X_j] = E[Z(1)] = m$$

となり、

$$E\left(Z(n) \mid Z(n=1) = N\right) = mN = mZ(n-1)$$

がわかる。マルチンゲールを得るために、$\mathcal{F}_n = \sigma\{Z(k); k \leq n\}$ とおいておくと、独立性の仮定から

$$E[Z(n) \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \sum_{j=1}^{Z(n-1)} E[X_j] = mZ(n-1)$$

であることがわかる。したがって、

$$M(n) = m^{-n} Z(n)$$

は $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールになっている。$M(n) \geq 0$ だから 確率 1 で $M(n)$ は $n \to \infty$ のとき、 M_∞ に収束する。

絶滅確率 少し別の計算をしてみる。以下では $p_0 > 0$ を仮定して絶滅の様子を見る。

分布 μ の母関数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$$

を考えておく。

$$f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

である。また、

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k x^{k-1}$$

なので、$x = 1$ を代入すると $f'(1) = m$ がわかる。もう一度微分すると

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k x^{k-1}$$

したがって、ここで $x = 1$ を代入すると

$$f''(1) = E[Z(1)^2] - m = \sigma^2 + m^2 - m$$

ただし、σ^2 は $Z(1)$ の (μ の) 分散。

さて、これからこのバクテリアの集団が絶滅する確率 e を求めたい。(extinction probability)

一匹から出発した集団が絶滅する確率を e としているので、k 匹から出発して絶滅する確率は、これらがすべて独立に子どもを生むことから e^k となることに注意すると、第一世代の個体数で条件をつけると、

- $Z(1)=0$ のとき：既に絶滅している。絶滅確率 1
- $Z(1)=1$ のとき：またこの一匹から同じことを始めるので、絶滅確率は e

…

- $Z(1)=k$ のとき：上に書いたように絶滅確率は e^k

…

したがって、

$$
\begin{aligned}
e &= P(Z(n)\text{ はいつかは絶滅する }) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} p_k P(Z(n)\text{ はいつかは絶滅する } \mid Z(1)=k) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} p_k e^k = f(e)
\end{aligned}
$$

つまり、 e は $x=f(x)$ の $0\le x\le 1$ を満たす解であることが分かる。いま、$p_k\neq 0$ がある $k\ge 2$ で成り立つ場合とそうでない場合を考える。まず、すべての $k\ge 2$ で $p_k=0$ とする。このとき、$f(x)$ は $f(1)=1, f(0)=p_0>0$ となる一次関数だから $e=1$ つまり、確実に死滅する。

次に $p_k\neq 0$ がある $k\ge 2$ で成り立つものとする。このとき、$f''(x)>0$ なので、$f(x)$ は凸関数。$f(1)=1$ だから、$e=1$ はつねに可能性がある。

いま、$m=f'(1)\le 1$ とすると、$y=f(x)$ は $0\le x\le 1$ で常に $y=x$ より上にある。したがって、このとき、方程式

$$x=f(x)$$

は $x=1$ しか $[0,1]$ で解を持たない。したがって、このとき、

$$e=1$$

(出生率が 2 を下回ると絶滅の危機が現れる：日本の現状)

つまり、確率 1 で ある n があり、$Z(n)=0$ となっている。したがって、このとき、 $M(n)=0$ がある n から先でつねに成り立っている。したがって、$M_\infty=0$ が確率 1 で成り立っている。

$m=f'(1)>1$ のときは、もう一つ別の解 e^* が $(0,1)$ にあることになる。e はどちらであろうか？

q_n を第 n 世代までに死滅する確率とすると、$q_0=0, q_1=p_1$ であり、

$$q_n = q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k q_{n-1}^k = f(q_{n-1})$$

が分かる。$n\to\infty$ のとき、$q_n\to e$ だから、q_n は 0 から単調に増加しながら e に近づいて行く。$f(x)$ は単調増加な関数であり、 $a<e^*$ のとき、

$$f(a)<f(e^*)=e^*$$

が成り立つので、$q_n<e^*$ が任意の n で成り立つ。したがって $e\le e^*$ だが、$f(e)=e$ なので、これは $e=e^*<1$ を意味している。

W_∞ は正になるか？

補題 1.24 $d=P(W_\infty=0)$ とおくと、$d=f(d)$ が成り立つ。

証明

$$
\begin{aligned}
d=P(W_\infty=0) &= P(W_n\to 0) \\
&= P(Z_1=0)+\sum_{k=1}^{\infty} P(W_n\to 0, Z_1=k) \\
&= p_0+\sum_{k=1}^{\infty} p_k P(W_n\to 0 \mid Z_1=k) \\
&= p_0+\sum_{k=1}^{\infty} p_k P(W_n\to 0)^k \\
&= f(d)
\end{aligned}
$$

□

したがって、$d=e^*$ または $d=1$

$d=e^*$ ？ それとも $d=1$ ？ (次回に続く)