1.9 Branching Process–continued

最初に $Z(n)$ の分散を求める。$x \in [0,1]$ に対して

$$f_n(x) = E[x^{Z(n)}]$$

とおく。第 $n-1$ 世代までの情報で条件つき期待値をとると

$$E[x^{Z(n)} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k\right)^{Z(n-1)}$$

となる。右辺は

$$f(x)^{Z(n-1)}$$

と書けるから、条件つき期待値の tower property により、

$$E[x^{Z(n)}] = E\big[E[x^{Z(n)} \mid \mathcal{F}_{n-1}]\big] = E[f(x)^{Z(n-1)}]$$

これを繰り返すと、

$$\begin{aligned} f_n(x) &= E[x^{Z(n)}] = E[f(x)^{Z(n-1)}] = E[f(f(x))^{Z(n-2)}] \\ &= \dots \\ &= E[(f^{\circ(n-1)}(x))^{Z(1)}] = f^{\circ n}(x) \end{aligned}$$

がわかる。ただし、

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),\ f^{\circ 1}(x) = f(x),\ f^{\circ n}(x) = f \circ (f^{\circ(n-1)})(x)$$

と定義する。

一方で、$f_n(x) = E[x^{Z(n)}]$ なので、

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k P(Z(n) = k)$$

とかけるので、$Z(n)$ の平均 m^n と分散 σ_n^2 は $f_n(x)$ を使って次のように表す事が出来る。

$$f_n'(1) = m^n, \quad f_n''(1) = \sigma_n^2 + m^{2n} - m^n$$

これは前回の計算と同じ。

補題 1.25

$$\sigma_n^2 = \begin{cases} \sigma^2 \frac{m^n(m^n-1)}{m^2-m} & \textit{if } m \neq 1, \\ n\sigma^2 & \textit{if } m = 1 \end{cases}$$

証明

$$f_n(x) = f^{\circ n}(x)$$

を使う。まず、$f_n''(1)$ を求めたい。

$$f_n'(x) = f'(f_{n-1}(x)) f_{n-1}'(x)$$

なので、これをもう一度微分して

$$f_n''(x) = f''(f_{n-1}(x))\big(f_{n-1}'(x)\big)^2 + f'(f_{n-1}(x)) f_{n-1}''(x)$$

これに $x = 1$ を代入して

$$f_n''(1) = f''(1)\big(f_{n-1}'(1)\big)^2 + f'(1) f_{n-1}''(1) = (\sigma^2 + m^2 - m) m^{2(n-1)} + m f_{n-1}''(1)$$

という漸化式を得る。$m \neq 1$ のときこれを解くと、

$$\begin{aligned} f_n''(1) &= (\sigma^2 + m^2 - m)(m^{2(n-1)} + m^{2n-3} + \ldots + m^n) + m^{n-1} f''(1) \\ &= (\sigma^2 + m^2 - m)\frac{m^{n-1}(m^n - 1)}{m - 1} \end{aligned}$$

したがって、

$$\sigma_n^2 = f_n''(1) - m^{2n} + m^n = \sigma^2 \frac{m^n(m^n - 1)}{m^2 - m}$$

$m = 1$ のときは上の漸化式は

$$f_n''(1) = \sigma^2 + f_{n-1}''(1) = \ldots = n\sigma^2$$

となる。一方で、

$$f_n''(1) = \sigma_n^2 - m^{2n} - m^n = \sigma_n^2$$

なので $\sigma_n^2 = n\sigma^2$ を得る。 □

これより、

$$E[M(n)^2] = m^{-2n} E[Z(n)^2] = m^{-2n}(\sigma_n^2 + m^{2n})$$

だから 補題 1.25 より

$$E[M(n)^2] = \begin{cases} 1+\sigma^2 \frac{1-m^{-n}}{m^2-m} & \text{if } m \neq 1 \\ n\sigma^2 & \text{if } m = 1 \end{cases}$$

$m \leq 1$ のとき、$E[M(n)^2] \to \infty$ となり、$m > 1$ のとき

$$E[M(n)^2] \to \sigma^2 \frac{1}{m^2-m}$$

となり、この時は $\sup_n E[M(n)^2] < \infty$ である。Fatou の補題より

$$E[M_\infty] \leq \sigma^2 \frac{1}{m^2-m} < \infty$$

となり M_∞ は 2 乗可積分な確率変数になっている。

定理 1.26 $m > 1$ のとき、

$$E[M_\infty^2] = \sigma^2 \frac{1}{m^2-m} > 0$$

したがって $d = e^* < 1$

証明 前半の証明だが、マルチンゲール性により、$k < n$ のとき、

$$E[M(n)M(k)] = E[E[M(n) \mid \mathcal{F}_k]M(k)] = E[M(k)^2]$$

だから、

$$\begin{aligned} E[(M(n)-M(k))^2] &= E[M(n)^2] - E[M(k)^2] \\ &= \sigma^2 \frac{m^{-k}(1-m^{-(n-k)})}{m^2-m} \\ &\to 0 \quad (n,k \to \infty) \end{aligned}$$

したがって $\{M(n)\}$ は $L^2(\Omega)$ のコーシー列となり、収束する。この極限は a.e. で M_∞ と等しい。したがって、

$$E[M_\infty^2] = \lim_{n\to\infty} E[M(n)^2] = \sigma^2 \frac{1}{m^2-m} > 0$$

が成り立つ。

後半の証明に移ろう。M_∞ の分散が正なので、

$$P(M_\infty = 0) < 1$$

となるので、$d = P(M_\infty = 0) < 1$ となり、d は e^* と一致しなくてはならない。 □

1.9.1 特別の場合：M_∞ の分布

$$p_k = (1-p)p^k$$

で与えられる場合を考える。このとき、分布の母関数 f は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)(px)^k = \frac{(1-p)}{1-px}$$

と、一次分数関数になる。$m = f'(1) = p/(1-p)$, $\sigma^2 = f''(1) - m^2 + m = p(1-p)^{-2}$ であり、p_{ext} は

$$p \leq 1/2 \ \text{ のとき } p_{ext} = 1, \quad p > 1/2 \ \text{ のとき } p_{ext} = (1-p)/p$$

となる。

$Z(n)$ の分布の母関数は $E[x^{Z(n)}] = f^{\circ n}(x)$ だった。f が一次分数関数なので、行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1-p \\ -p & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、$f^{\circ n}(x)$ の係数は

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1-p \\ -p & 1 \end{pmatrix}^n = (1-2p)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-p)^n & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & -p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

の形で求まる。 これを計算して $m = p/(1-p)$ なので、

$$f^{\circ n}(x) = \frac{(1-p)m^n(1-x) + px - (1-p)}{pm^n(1-x) + px - (1-p)}$$

となる。これより $M(n)$ の母関数は

$$\begin{aligned} f^{\circ n}(x^{1/m^n}) &= \frac{(1-p)m^n(1-x^{1/m^n}) + px^{1/m^n} - (1-p)}{pm^n(1-x^{1/m^n}) + px^{1/m^n} - (1-p)} \\ &\to \frac{-(1-p)\log x + p - (1-p)}{-p\log x + p - (1-p)} \end{aligned}$$

となる。これが M_∞ の母関数。$x = e^{-\lambda}$ とかいて

$$E[e^{-\lambda M_\infty}] = \lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(e^{-\lambda m^{-m}}) = \frac{(1-p)\lambda + p - (1-p)}{p\lambda - (1-p)}$$

なので、$p_{ext} = \frac{1-p}{p}$ だったから、

$$E[e^{-\lambda M_\infty}] = p_{ext} + (1-p_{ext})^2 \frac{1}{\lambda + (1-p_{ext})}$$

最後の式はラプラス変換としてかける。

$$\frac{1}{\lambda + (1-p_{ext})} = \int_0^\infty e^{-\lambda x + (1-p_{ext})x} dx$$

$M_\infty > 0$ となる確率が $1 - p_{ext}$ であるので、

$$P(M_\infty \in dx | M_\infty > 0) = (1-p_{ext}) e^{-(1-p_{ext})x}\, dx$$

であることがわかる。