なので、$p_{ext} = \frac{1-p}{p}$ だったから、

$$E[e^{-\lambda M_\infty}] = p_{ext} + (1-p_{ext})^2 \frac{1}{\lambda + (1-p_{ext})}$$

最後の式はラプラス変換としてかける。

$$\frac{1}{\lambda + (1-p_{ext})} = \int_0^\infty e^{-\lambda x + (1-p_{ext})x} dx$$

$M_\infty > 0$ となる確率が $1-p_{ext}$ であるので、

$$P(M_\infty \in dx | M_\infty > 0) = (1-p_{ext}) e^{-(1-p_{ext})x}\, dx$$

であることがわかる。

1.10 マルチンゲールの不等式

まず最初に劣マルチンゲールに関する不等式を証明する。

補題 1.27 $\{X(n)\}$ が非負の $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールであるとき、任意の $\lambda > 0$ と任意の整数 $n \geq 0$ に対して

$$P(\max_{0\leq k\leq n} X(k) \geq \lambda) \leq \frac{E[X(n)]}{\lambda}$$

が成り立つ。

証明

$$T = \min\{k \geq 0; X(k) \geq \lambda\}$$

とおくと、T は $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻。したがって、

$$\lambda P(\max_{0\leq k\leq n} X(k) \geq \lambda) = \lambda P(T \leq n) \leq E[X(T\wedge n)\,;\, T \leq n]$$

劣マルチンゲール性から

$$E[X(T\wedge n)\,;\, T\leq n] \leq E[X(n)\,;\, T \leq n]$$

$X(n) \geq 0$ だから右辺は全体で積分した方が大きい。よって、

$$\lambda P(\max_{0\leq k\leq n} X(k) \geq \lambda) \leq E[X(n)]$$

両辺を $\lambda > 0$ で割れば求める不等式を得る。 □

系 1.28 $\{M(n)\}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールとするとき、任意の $\lambda > 0$ と任意の整数 $n \geq 0$ に対して

$$P(\max_{0\leq k\leq n} |X(k)| \geq \lambda) \leq \frac{E[|X(k)|]}{\lambda}$$

が成り立つ。

証明 $\varphi(x) = |x|$ は凸関数なので条件つき Jensen の不等式より

$$E[|X(n+1)| \mid \mathcal{F}_n] \geq |E[X(n+1) \mid \mathcal{F}_n]| = |X(n)|$$

最後の式はマルチンゲール性による。したがって $|X(n)|$ は非負の劣マルチンゲール。したがって、補題 1.27 により、求める不等式を得る。 □

補題 1.29 $\{X(n)\}$ が $p(>1)$ 乗可積分な非負の $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールとすると、任意の整数 $n \geq 0$ に対して

$$E[\sup_{0\leq k\leq n} X(k)^p]^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} E[X(n)^p]^{1/p}$$

証明 $X^*(n) = \max_{0\leq k\leq n} X(k)$ とかく。

$$\begin{aligned}
E[(X^*(n))^p] &= E[\sup_{0\leq k\leq n} X(k)^p] \\
&= E[\int 0^\infty 1_{[0,X^*(n)]}(t) pt^{p-1}\, dt] \\
&= \int_0^\infty E[1_{\{X^*(n)\geq t\}}] pt^{p-1}\, dt \quad \because \mathit{Fubini}\ \text{の定理} \\
&= \int_0^\infty P(X^*(n) \geq t)] pt^{p-1}\, dt \\
&\leq \int_0^\infty \frac{E[X(n) 1_{\{X^*(n)\geq t\}}]}{t} pt^{p-1}\, dt \because\ \text{補題 1.27 の証明} \\
&= E[X(n) \int_0^{X^*(n)} pt^{p-2}\, dt] \quad \because \mathit{Fubini}\ \text{の定理} \\
&= \frac{p}{p-1} E[[X(n)(X^*(n))^{p-1}] \\
&\leq \frac{p}{p-1} E[X(n)^p]^{1/p} E[(X^*(n))^p]^{1/q} \quad \because\ \text{Hörder の不等式}
\end{aligned}$$

ただし、$q > 1$ は $1/p + 1/q = 1$ つまり、$q = p/(p-1)$. これより、$E[(X^*(n))^p]^{1/q}$ で両辺をわって、

$$E[(X^*(n))^p]^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} E[X(n)^p]^{1/p}$$

を得る。 □

系 1.30 $M(n)$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールならば、

$$E[(\max_{0 \leq k \leq n} |M(k)|)^p]^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} E[M(n)^p]^{1/p}$$

応用

定理 1.31 (Kolmogorov の不等式)
$\{X(n)\}$ が独立、同分布な確率変数列で、$E[X(1)] = 0, E[X(1)^2] = \sigma^2$ をみたすとき、

$$P(\max_{0 \leq k \leq n} |X(1) + \ldots + X(k)| \geq \lambda) \leq \frac{n\sigma^2}{\lambda^2}$$

証明 $S(n) = X(1) + \ldots + X(n)$ は $\mathcal{F}_n = \sigma\{X(k); 1 \leq k \leq n\}$ に対して $\mathcal{F}_n$-マルチンゲールであるので、$S(n)^2$ は $f(x) = x^2$ が凸関数なので、$\mathcal{F}_n$-劣マルチンゲール。補題 1.27 より、求める不等式を得る。 □

定理 1.32 (角谷の同値定理) $\{X(n)\}$ を独立な非負の確率変数列で、$EX(n) = 1$ が任意の $n \geq 1$ について成り立つとする。$M(0) = 1, M(n) = X(n)M(n-1)$ によって $M(n)$ を定義すると、$M(n)$ は $\mathcal{F}_n = \sigma\{X(k); 1 \leq k \leq n\}$ に対して非負の $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールで、したがって

$$M_\infty = \lim_{n \to \infty} M(n)$$

が $a.e.$ で存在し、以下の 5 条件は同値である。

(1) $E[M_\infty] = 1$,

(2) $M(n) \to M_\infty$ が $L^1(\Omega)$ で成立。

(3) $\{M(n)\}$ は一様可積分、すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対し $K > 0$ が存在し、

$$\sup_{n \geq 0} E[M(n); M(n) > K] < \varepsilon$$

(4) $0 < \prod E[\sqrt{X(n)}]$,

(5) $\sum (1 - E[\sqrt{X(n)}]) < \infty$

さらに、これらのいずれかの条件がなりたたないとき、

$$P(M_\infty = 0) = 1$$

証明 (1) ⇒(2):

$$\begin{aligned} E[|M(n) - M_\infty|] &= E[M(n) - M_\infty\,;\, M(n) \geq M_\infty] + E[M_\infty - M(n)\,;\, M_\infty > M(n)] \\ &= E[M(n)] - E[M_\infty] + 2E[M_\infty - M(n); M_\infty > M(n)] \\ &= 2E[(M_\infty - M(n))1_{\{M_\infty > M(n)\}}] \end{aligned}$$

ここで、

$$0 \leq (M_\infty - M(n))1_{\{M_\infty > M(n)\}} = (M_\infty - M(n))_+ \leq M_\infty$$

なので、 Lebesgue の収束定理と $(M_\infty - M(n))_+ \to 0$ が a.e. で成り立っている事から、$n \to \infty$ のとき、

$$2E[(M_\infty - M(n))1_{\{M_\infty > M(n)\}}] \to 0$$

つまり、$M(n)$ は M_∞ に $L^1(\Omega)$ で収束している。
(2)⇒(3): M_∞ が可積分なので、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ がとれて $A \in \mathcal{F}$ が $P(A) < \delta$ ならば

$$E[M_\infty; A] = E[M_\infty 1_A] < \varepsilon \tag{1.15}$$

となること (絶対連続性) をまず言う。可積分性からある $\lambda > 0$ がとれて

$$E[M_\infty; M_\infty \geq \lambda] < \frac{\varepsilon}{2}$$

とできる。この K に対して $\delta < \varepsilon/2\lambda$ となるようにとっておくと、$P(A) < \delta$ のとき、

$$\begin{aligned} E[M_\infty; A] &\leq E[M_\infty; M_\infty > \lambda] + E[M_\infty; \{M_\infty \leq \lambda\} \cap A] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + KP(\{M_\infty \leq \lambda\} \cap A) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \lambda\delta \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \lambda\frac{\varepsilon}{2\lambda} = \varepsilon \end{aligned}$$