次に、任意の $\varepsilon > 0$ に対して (2) より

$$E[|M(n) - M_\infty|] \to 0$$

なので、N を $n \geq N$ ならば

$$E[|M(n) - M_\infty|] < \frac{\varepsilon}{3}$$

とできている。このとき、$n \geq N$ ならば、

$$\begin{aligned} E[M(n)\,;\,M(n) > K] &\leq E[M_\infty\,;\,M(n) > K] + E[|M(n) - M_\infty|] \\ &< E[M_\infty\,;\,M(n) > K] + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

ここで、$\varepsilon/2$ に対して (1.15) で保証された δ をとって、$P(B) < \delta$ ならば $E[M_\infty\,;\,B] < \varepsilon/3$ となるようにとっておく。チェビシェフの不等式から

$$P(M(n) > K) \leq \frac{E[M(n)]}{K} = \frac{1}{K}$$

であるので、$K > 1/\delta$ のとき

$$E[M_\infty\,;\,M(n) > K] \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

したがって、$n \geq N$ のとき、

$$\sup_{n \geq N} E[[M(n)\,;\,M(n) > K] \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

一方、$K \to \infty$ のとき、

$$\max_{0 \leq k \leq N} E[M(n)\,;\,M(n) > K] \to 0$$

だから 十分大きい K_1 がとれて、$K > K_1$ ならば

$$\max_{0 \leq k \leq N} E[M(n)\,;\,M(n) > K] < \varepsilon$$

が成り立つ。

(3)⇒(1):

$$E[M_\infty] \leq \liminf_{n \to \infty} E[M(n)] = 1$$

は Fatou の補題から成立。逆の不等式を示せば良い。任意の $\varepsilon > 0$ に対して (3) により K がとれて、任意の n に対して一様に

$$E[M(n); M(n) \geq K] \leq \varepsilon$$

したがって任意の $n \geq 1$ で

$$1 = E[M(n)] \leq E[M(n)\,M(n) \leq K] + \varepsilon \leq E[M(n) \wedge K] + \varepsilon.$$

有界収束定理により $E[M(n) \wedge K] \to E[M_\infty \wedge K]$ だから、上式で $n \to \infty$ として、

$$1 \leq E[M_\infty \wedge K] + \varepsilon \leq E[M_\infty] + \varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ として求める式を得る。

(4)⇒(5):

$a_n = E\sqrt{X(n)}$ とおくと、$EX(n) = 1$ なので、 $X(n) > 0$ である確率は正。したがって、Schwarz の不等式から

$$0 < a_n \leq \sqrt{EX(n)} = 1$$

$b_n = 1 - a_n > 0$ に対して

$$\prod_{n=1}^{N} a_n = \prod_{n=1}^{N} (1 - b_n) \leq e^{-\sum_{n=1}^{N} b_n}$$

ここで、$N \to \infty$ として

$$0 < \prod_{n=1}^{\infty} a_n \leq e^{-\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$$

したがって $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

(5)⇒(4):

$\sum b_n < \infty$ なので、N を大きくとると、

$$\sum_{n=N}^{\infty} b_n < \frac{1}{2}$$

とできる。このとき、

$$\prod_{n=N}^{\infty} a_n = \prod_{n=N}^{\infty} (1 - b_n) \geq 1 - \sum_{n=N}^{\infty} b_n > \frac{1}{2}$$

なので、

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \geq \frac{1}{2}\prod_{n=1}^{N-1} a_n > 0$$

(1)⇒(4):

$$N(n) = \frac{\sqrt{X(1)}}{a_1} \times \cdots \times \frac{\sqrt{X(n)}}{a_n}$$

とおくと、

$$E(N(n+1) \mid \mathcal{F}_n) = N(n)\frac{E\sqrt{X(n+1)}}{a_{n+1}} = N(n)$$

なので、 $N(n)$ は非負の $\mathcal{F}_n$-マルチンゲール。したがって $n \to \infty$ のとき、有限な値 N_∞ に近づく。いま、$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ とすると、

$$M(n) = N(n)^2 \prod_{j=1}^{n} a_n^2$$

だから、$n \to \infty$ のとき、$M(n) \to 0$ が a.e. で成り立つ。ゆえに $M_\infty = 0$ が a.e. で成り立つが、このとき (1) は成り立たない。

(4)⇒(3):

$$E(N(n)^2) = E(M(n))\Big(\prod_{j=1}^{n} a_j^2\Big)^{-1} \leq \prod_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} < \infty$$

なので、

$$E[\max_{1\leq k\leq n} M(k)] = E[\max_{1\leq k\leq n} N(k)^2(\prod_{j=1}^{n} a_j^2)] \leq E[\max_{1\leq k\leq n} N(k)^2]$$

補題 1.29 で $p = 2$ として $N(n)$ について使うと、

$$E[\max_{1\leq k\leq n} N(k)^2] \leq 2^2 E[N(n)^2] < \infty$$

となり、$n \to \infty$ のとき

$$E[\sup_{n<\infty} M(n)] \leq 4\sup_{n} E[N(n)^2] < \infty$$

となり、 $M^* = \sup_{n<\infty} M(n)$ は可積分。このとき、

$$\sup_{n} E[M(n); M(n) > K] \leq \sup_{n} E[M^*; M(n) > K]$$

右辺は M^* が可積分な事から絶対連続性により、$K \to \infty$ のとき 0 に収束。(3) が言えた。 □

練習問題 1.10 (Azuma-Höffding の不等式)

(i) X を $|X| \leq 1$ かつ $EX = 0$ となる確率変数とする。このとき、任意の実数 t に対して

$$E[e^{tX}] \leq \cosh t \leq \exp\{\frac{t^2}{2}\}$$

が成り立つ事を証明せよ。(ヒント: e^{tx} は凸関数なので、$p = (1-x)/2$ に対して

$$pe^{-t} + (1-p)e^t \geq e^{tx}$$

ここで、$x = X$ として平均をとる。後半は t のついての Taylor 展開を比較)

(ii) $M(0) = 0$ となる $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲール $\{M(n)\}$ が、 任意の $n \geq 1$ に対して

$$|M(n) - M(n-1)| \leq 1$$

を満たす時、

$$P(\sup_{1\leq k\leq n} M(k) \geq x) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{n}\right) \tag{1.16}$$

が成り立つ事を次の順序で証明せよ。

(a) まず、任意の $n \geq 1$ と 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$P(\sup_{1\leq k\leq n} M(k) \geq x) \leq e^{-tx}E[e^{tM(n)}]$$

を証明せよ。

(b) $k \geq 1$ に対して $X(k) = M(k) - M(k-1)$ とおき、

$$E[e^{tX(k)} \mid \mathcal{F}_n] \leq e^{t^2/2}$$

を示せ。

(c) さらに、これより

$$P(\sup_{1\leq k\leq n} M(k) \geq x) \leq e^{-tx+nt^2/2}$$

を示せ。

(d) t をうまく選んで (1.16) を証明せよ。