1.11 角谷の同値定理：無限直積空間上の直積測度の同値性

$\mathbb{X} = \{X_n\}$ 独立な確率変数列で、各 X_n の分布は

$$P(X_n \in A) = \int_A f_n(x)\, dx$$

によって与えられているものとする。$f_n(x)$ は至るところ正の確率密度関数とする。別に $g_n(x)$ を至るところ正の確率密度関数とするとき、

$$P(Z_n \in A) = \int_A g_n(x)\, dx$$

で与えられる独立な確率変数列 $\{Z_n\}$ を考える。

定義 1.12 X を空でない集合、$\mathcal{B}$ を X の部分集合の作るある σ-加法族とする。μ と ν を可測空間 $(X,\mathcal{B})$ 上の二つの確率測度とする時、μ が ν に対して **絶対連続** であるとは、

$$\nu(A) = 0 \quad \text{ならば}\ \mu(A) = 0$$

が任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して成り立つ時に言う。また、このとき

$$\mu \preccurlyeq \nu$$

と書く事にする。

$$\mu \preccurlyeq \nu \quad \text{かつ}\ \nu \preccurlyeq \mu$$

のとき μ と ν は**互いに絶対連続**という。

任意の $n \geq 1$ に対して $\mathbf{R}^n$ 上の $\mathbb{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ の分布 μ_n と $\mathbb{Z}_n = (Z_1, \ldots, Z_n)$ の分布 ν_n が互いに絶対連続である事を見よう。

$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ のとき、

$$\begin{aligned}
& P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) \\
= & \int_{A_1} f_1(x_1)\, dx_1 \cdots \int_{A_n} f_n(x_n)\, dx_n \\
= & \int_{\mathbf{R}^n} \prod_{j=1}^n 1_{A_j}(x_j) f_j(x_j)\, dx_1 \cdots dx_n \\
= & \int_{\mathbf{R}^n} \prod_{j=1}^n 1_{A_j}(x_j) h_j(x_j) g_j(x_j)\, dx_1 \cdots dx_n \\
= & E\left[\prod_{j=1}^n h_j(Z_j) 1_{A_j}(Z_j)\right]
\end{aligned}$$

ここに、

$$h_j(x) = \frac{f_j(x)}{g_j(x)} > 0$$

とかけるので、一般の $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ についても、

$$P(\mathbb{X}_n \in A) = E\left[\prod_{j=1}^n h_j(Z_j); \mathbb{Z}_n \in A\right]$$

が成り立つ。独立性から

$$E\left[\prod_{j=1}^n h_j(Z_j)\right] = \prod_{j=1}^n E[h_j(Z_j)]$$

であり、

$$E[h_j(Z_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_j(x) g_j(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x)\, dx = 1$$

なので、$\prod_{j=1}^n h_j(Z_j)$ は可積分である。したがって、$A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ が

$$\nu_n(A) = 0$$

をみたせば $E[\prod_{j=1}^n h_j(Z_j); A] = 0$ なので、$\mu_n(A) = 0$ がでる。逆は h_j のかわりに h_j^{-1} を考えれば良い。したがって μ_n と ν_n は互いに絶対連続である。

問題は、たとえば、$\dfrac{Z_1+\ldots+Z_n}{n}\to 0$ が確率 1 で成り立つ時、$\{X_n\}$ 達ではどうかと言うような問題を考えなくてはいけない時である。

これは、$\mathbf{R}^\infty$ 上の $\mathbb{X}$ の分布 μ と $\mathbb{Z}$ の分布 ν の絶対連続性を問題にする事である。

先程書いたように、$A\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$ に対して形式的には

$$P(\mathbb{X}\in A)=\lim_{n\to\infty}E[\prod_{j=1}^n h_j(Z_j);A]$$

とかけるから、$M(n)=\prod_{j=1}^n h_j(Z_j)$ とおくと、$\mathcal{F}_n=\sigma\{Z_j;1\le j\le n\}$ に対して

$$E[M(n+1)\mid\mathcal{F}_n]=M(n)E[h_{n+1}(Z_{n+1})]=M(n)$$

だから、$M(n)$ は 非負の $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールなので、$M_\infty=\lim_{n\to\infty}M(n)$ が存在する。このとき、

$$E[M_\infty]=1$$

ならば、定理 1.32 により、$M(n)$ は $L^1(\Omega)$ で M_∞ に収束するので、$A\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^N)$ ならば、

$$E[M_\infty;A]=\lim_{n\to\infty}E[M(n);A]$$

が成立。一方で、$n\ge N$ のとき

$$E[M(n);A]=P(\pi_N^n\mathbb{X}_n\in A)=P(\mathbb{X}_N\in A)$$

ただし、$\pi_N^n:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^N$ は最初の N 個の座標への射影。これは $n\to\infty$ として、

$$E[M_\infty;A]=P(\mathbb{X}_N\in A)=P(\pi_N\mathbb{X}\in A)$$

ただし、$\pi_N:\mathbf{R}^\infty\to\mathbf{R}^N$ は、最初の N 個の座標への射影。N は任意なので、この式は

$$\int_A M_\infty(\mathbf{x})\nu(d\mathbf{x})=\mu(A)$$

が任意の $A\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$ に対して成り立つ事を言っている。したがって、μ は ν に対して絶対連続である。

定理 1.32 により、このことは

$$\sum_{n=1}^\infty(1-E(\sqrt{h_n(Z_n)}))<\infty$$

と同値である。

$$E\left[\sqrt{h_n(Z_n)}\right]=\int_{-\infty}^\infty\sqrt{\frac{f_n(x)}{g_n(x)}}g_n(x)\,dx=\int_{-\infty}^\infty\sqrt{f_n(x)g_n(x)}\,dx$$

であるので、

$$\sum_{n=1}^\infty(1-E(\sqrt{h_n(Z_n)}))=\sum_{n=1}^\infty\int_{-\infty}^\infty(1-\sqrt{f_n(x)g_n(x)})\,dx=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty\int_{-\infty}^\infty\left(\sqrt{f_n(x)}-\sqrt{g_n(x)}\right)^2dx$$

となり、定理 1.32 より、$E[M_\infty]=1$ と

$$\sum_{n=1}^\infty\int_{-\infty}^\infty\left(\sqrt{f_n(x)}-\sqrt{g_n(x)}\right)^2dx<\infty$$

とが同値であることがわかり、このとき、μ は ν に対して絶対連続だが、f_n と g_n の役割を入れ換える事により、このとき、μ と ν は互いに絶対連続な事がわかる。また、絶対連続性があれば、たとえば、$d\mu=\frac{d\mu}{d\nu}d\nu$ とかけ、

$$\int\frac{d\mu}{d\nu}\,d\nu=1$$

だから、$M_\infty(\mathbb{Z})=\frac{d\mu}{d\nu}(\mathbb{Z})$ とかけ、$E[M_\infty]=1$ がでるので、($M(n)=E(M_\infty\mid\mathcal{F}_n)$) このとき、上の議論から

$$\sum_{n=1}^\infty\int_{-\infty}^\infty\left(\sqrt{f_n(x)}-\sqrt{g_n(x)}\right)^2dx<\infty$$

が出る。すなわち、この不等式は μ と ν が互いに絶対連続な事 ($\mathbb{Z}$ と $\mathbb{X}$ の分布が絶対連続な事) と同値である。(角谷の同値定理)