1 変数の積分

変数の変換

- 三角関数の有理式の積分

$$\int \frac{1}{\sin x}dx, \int \frac{1}{1+\cos x}dx \text{ など。}\quad t = \tan\frac{x}{2} \text{ とおくとよい}$$

このとき、

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1+t^2}{2}dx, \quad \therefore \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ など} \end{aligned}$$

- 有理関数の積分 （部分分数展開）

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)\,dx \quad \text{など}$$

- 無理関数の積分

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \quad \text{など}$$

(1) $a > 0$ ならば $t = \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2+bx+c}$ とおく。x についてとくと $x = \dfrac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}$

(2) $a < 0$ ならば $ax^2+bx+c=0$ の 2 実数解を $\alpha < \beta$ として、$t = \sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}$ とおく。x についてとくと $x = \dfrac{\beta t^2+\alpha}{1+t^2}$

練習 1 次の積分を計算せよ。

$$\begin{array}{llllll} (1) & \displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx & (2) & \displaystyle\int \frac{x}{x^4+1}\,dx & (3) & \displaystyle\int \frac{e^{\tan^{-1}2x}}{1+4x^2}dx \\ (4) & \displaystyle\int \sqrt{3+5x^2}\,dx & (5) & \displaystyle\int \tan^{-1}x\,dx & (6) & \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx \end{array}$$

ヒント：(5),(6) は部分積分

多変数の積分

- 重積分 (積分順序の交換) 領域 D が

  $D = \{a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\} = \{c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$

  と二通りに表す事ができるとき

  $$\int_D h(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} h(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} h(x,y)\,dx\right] dy$$

  が成り立つ。

例 1

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2}\,dydx = \int_0^2 e^{y^2} \int_0^{2y} dxdy = \int_0^2 2ye^{y^2}\,dy = e^4 - 1$$

- 重積分（変数変換）$(x,y) \in D$ と $(u,v) \in G$ が 1 対 1 に対応するとき

  $$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_G f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

  変数を取り換えると領域がどう変わるかに注意が必要。例えば $\{0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq x+y \leq 1\}$ を $u = (x+y), v = (x-y)$ と取り換えると、$x = (u+v)/2, y = (u-v)/2$ なので、ヤコビアンの絶対値は $1/2$ になり、(u,v) の動く範囲は

  $$0 \leq u+v \leq 2, 0 \leq u-v \leq 2, 0 \leq u \leq 1$$

  を満たす領域に変わる。

  極座標

  ・2 次元の場合

  $$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

  ・3 次元の場合

  $$x = r\cos\theta\sin\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\varphi \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi)$$

練習 2 次の重積分の積分の順序を交換せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dxdy$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)\,dxdy$ (3) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dxdy$

練習 3 次の重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 \int_{-1}^4 \int_0^{3y+1} dzdydx$ (2) $\displaystyle\int_0^2 \int_1^z \int_0^{\sqrt{x/z}} 2xyz\,dydxdz$

(3) $\displaystyle\int_{0\le z\le 4-x^2-\frac{4}{9}y^2} dxdydz$ (4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^z \int_0^y \sin(x+y+z)\,dxdydz$

(5) $\displaystyle\int_D dxdydz,$ ただし、 $D = \{0 \le x \le \sqrt{4-y^2}, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}$

- 曲面積

  曲面 $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in G$ の曲面積は

$$\int_G \sqrt{\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|^2}\,dudv$$

  で与えられる。

例 2 平面 $x+2y+3z=0$ の $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ の部分の面積は $u=x, v=y, G=[0,1]^2$ とおいて、$z = \frac{-1}{3}(x+2y)$ だから

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}$$

および、$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}\right| = 1$ だから、

$$S = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}\,dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

と計算できる。

練習 4 1. 平面 $3x+4y+6z=12$ の $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$ の部分の面積を求めよ。

2. 曲面 $z = \sqrt{4-y^2}$ の $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$ の部分の曲面積を求めよ。

3. 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の $z>0, x^2+y^2 \le b^2$ の部分の曲面積を求めよ。ただし、 $0<b<a$ とする。

略解 ln は自然対数とする。
練習 1 (1) $\frac{1}{4}\log(1+x^4)+C$ (2)$\frac{1}{2}\tan^{-1}x^2+C$ ($\frac{1}{2}\left[\tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)-\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1)\right]+C$ でもよい)
(3)$\frac{1}{2}e^{\tan^{-1}2x}+C$

$$(4)\frac{1}{4\sqrt{5}}\left[\frac{u^2}{2}+6\ln u-\frac{9}{2}u^{-2}\right]+C \quad \text{ただし } u=\sqrt{5}x+\sqrt{3+5x^2}$$

(5)$x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ (6) $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{4}\right)\pi+\frac{1}{2}\ln 2$

練習 2 (1) $\int_0^4\int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx$ (2) $\int_{-1}^0\int_{-x}^1 f(x,y)\,dydx + \int_0^1\int_x^1 f(x,y)\,dydx$ (3) $\int_{-1}^1\int_{x^2-1}^0 f(x,y)\,dydx$

練習 3 (1) 55 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 12π (4)$\frac{1}{3}$ (5) 3π

練習 4 (1) $\sqrt{61}/3$ (2)$2\pi/3$ (3) $2\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2})$