微分積分学入門 模擬テスト解答 (2010 年 07 月 20 日 (火曜日) 2 限実施)

1. 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $2\sqrt{x}$　(2)πx^{π}　(3) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$　(5) $x\sin x$　(6) 2^x

[**解答**]

(1) $f(x) = 2\sqrt{x}, \quad f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(2) $f'(x) = \pi^2 x^{\pi-1}$

(3) $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} = (x^2+x+1)^{-1/2}$ なので、
$f'(x) = -\dfrac{1}{2}(x^2+x+1)^{-3/2}(2x+1)$

(5) $f'(x) = \sin x + x\cos x$

(6) $f(x) = 2^x$ なので両辺の対数を取ると $\log f(x) = x\log 2$ 両辺を x で微分して、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log 2 \quad \therefore\ f'(x) = 2^x \log 2$$

2. 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\sqrt{x}$ (2) $\sin \pi x$ (3) $\cos 2x$ (4) xe^x (5)$\cos^3 x \sin x$

[**解答**]

(1) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

(2) $t = \pi x$ とおくと、$dt = \pi dx$ で、
$\displaystyle\int \sin \pi x\,dx = \int \sin t \frac{1}{\pi} dt = -\frac{1}{\pi}\cos t + C = -\frac{1}{\pi}\cos \pi x + C$

(3) $t = 2x$ とおくと、$dt = 2dx$ で、
$\displaystyle\int \cos 2x\,dx = \int \cos t \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

(4) $\displaystyle\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$

(5) $t = \cos x$ とおくと $dt = -\sin x dx$ で、
$\displaystyle\int \cos^3 x \sin x\,dx = -\int t^3 dt = -\frac{1}{4}t^4 + C = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$

3. 次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^2 e^{3x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x^3}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \cos x\,dx$ (5) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx$

[**解答**]

(1) $x = 2\sin t$ とおく。x が 0 から 1 を動く時、t は 0 から $\pi/6$ を動く。$dx = 2\cos t\,dt$ だから、

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/6} \frac{2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\,dt = \int_0^{\pi/6} dt = \frac{\pi}{6}$$

(2) $3x = t$ とおく。。x が 0 から 2 を動く時、t は 0 から 6 を動く。$3dx = dt$ だから

$$\int_0^2 e^{3x}\,dx = \int_0^6 e^t \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}(e^6 - 1)$$

(3) $t = \log x$ とおく。x が 1 から e を動く時、t は 0 から 1 を動く。$\frac{1}{x}dx = dt$ だから

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\log x}{x^3}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{e^{2t}}\,dt &= \left[t\cdot(-\frac{1}{2}e^{-2t})\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2t}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} + \left[-\frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}(e^{-2}-1) = \frac{1-3e^{-2}}{4}\end{aligned}$$

(4) $\int_0^\pi e^x \cos x\,dx = I$ とかくと、

$$\begin{aligned}I &= [e^x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x(-\sin x)\,dx \\ &= -e^\pi - 1 + [e^x \sin x]_0^\pi - I \\ 2I &= -e^\pi - 1 \quad \therefore I = -\frac{e^\pi+1}{2}\end{aligned}$$

(5) $t = x+1$ とおくと、x が 0 から 1 を動く時、t は 1 から 2 を動く。$dx = dt$ だから

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx &= \int_1^2 (t+1)t^{1/2}\,dt = \left[\frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^2 \\ &= \frac{2}{5}4\sqrt{2} - \frac{2}{3}2\sqrt{2} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

4. $x \geq 0$ のとき、 $\log(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ が成り立つ事を証明せよ

[解答] $f(x) = \log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ とおく。

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-(1-x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

なので、$f'(x)$ は $x \geq 0$ で 0 以上となり、 $f(x)$ はこのとき単調非減少。

$$f(0) = \log 1 - 0 + 0 = 0$$

であるから、$x \geq 0$ のとき、$f(x) \geq f(0) = 0$ となる。この式を移項して、$x \geq 0$ のとき、

$$\log(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

が言える。

5. 関数 $f(x,y)=x^3+y^3+9x^2+9y^2+12xy$ の極値を調べよ。

[**解答**]　極値を取る点の候補を探す。そのような点 (x,y) では $f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$ が両立しているので、

$$f_x=3x^2+18x+12y, \quad f_y=3y^2+18y+12x$$

となり、

$$\begin{aligned} x^2+6x+4y &= 0 \quad (1) \\ y^2+6y+4x &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

が成り立つ点を探す。(1)− (2) より、

$$x^2-y^2+6(x-y)-4(x-y)=0 \qquad \therefore (x-y)(x+y+2)=0$$

したがって、$x=y$ または $x+y+2=0$ が成り立っている。

$x=y$ のとき、(1) に代入すると $x^2+10x=0$ これより、$x=y=0$ または $x=y=-10$ を得るので、$(x,y)=(0,0),(-10,-10)$ が候補になる。

$x+y+2=0$ のとき、 (1) に代入して、$x^2+6x-4(x+2)=0$ つまり、

$$x^2+2x-8=0$$

をえる。この解は $x=2,-4$ だから、このとき極値を取る点の候補は $(x,y)=(2,-4)$, $(-4,2)$ となる。これらの点については確かに $f_x=f_y=0$ となっている。

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x+18 \\ f_{xy} &= f_{yx}=12 \\ f_{yy} &= 6y+18 \end{aligned}$$

であるから、上記各点における $D=f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}$ の符号を調べると、

$(x,y)=(0,0)$ のとき、$D=12^2-18^2<0$ で、$f_{xx}(0,0)=18>0$ だから $f(0,0)=0$ は極小値である。

$(x,y)=(-10,-10)$ のとき、$D=12^2-42^2<0$ で、$f_{xx}(-10,-10)=-42<0$ だから、$f(-10,-10)=-1000-1000+900+900+1200=1000$ は極大値である。

$(x,y)=(-4,2)$ のとき、$D=12^2+180>0$ となり、この点では極値は取らない。

$(x,y)=(2,-4)$ のときも、$D=12^2+180>0$ となり、この点では極値は取らない。