第4章　確率解析とBrown 運動

4.1　Brown 運動の強マルコフ性

話は 1 次元で行うが多次元でも同様にできる．以下，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)$ が与えられているものとする．また、フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)$ は右連続とする．つまり，

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_{t+s}$$

が成り立つものとする．まず，Brown 運動の強マルコフ性を述べるために $\mathcal{F}_t$-停止時刻を定義する．

定義 4.1 $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ が $\mathcal{F}_t$-停止時刻であるとは，任意の $t \geq 0$ に対して

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

が成り立つときに言う．

$\mathcal{F}_t$-停止時刻に対して，時刻 τ までの情報の全体 $\mathcal{F}_\tau$ を

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F};\ \text{任意の } t \geq 0 \text{ に対して } A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

で定める．

注意 4.1 $\mathcal{F}_\tau$ は σ-加法族である．実際，$\Omega \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ は明らかだから $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$ はすぐに分かる．いま，$A \in \mathcal{F}_\tau$ とするとき，

$$A^c \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap (A \cap \{\tau \leq t\})^c$$

だから，右辺は τ が停止時刻であることと $\mathcal{F}_\tau$ の定義から $\mathcal{F}_t$ の元であることが分かる．つまり，$A^c \in \mathcal{F}_\tau$ である．最後に $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_\tau$ とする．このとき，

$$(\cup_{n\geq 1} A_n) \cap \{\tau \leq t\} = \bigcup_{n\geq 0} (A_n \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$$

となり，$\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}_\tau$ も分かる．以上より $\mathcal{F}_\tau$ は確かに σ-加法族になっている．

命題 4.2 τ, T を二つの $\mathcal{F}_t$-停止時刻とし，$\tau \leq T,\ a.s.$ とする．このとき

$$\mathcal{F}_T \supset \mathcal{F}_\tau$$

である．

証明　$A \in \mathcal{F}_\tau$ のとき，任意の $t \geq 0$ に対し，

$$A \cap \{T \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

となるので $A \in \mathcal{F}_T$.

例 4.1 $X(t)$ を右連続な確率過程で，$(\mathcal{F}_t)$-適合，つまり任意の $t \geq 0$ に対して $X(t)$ は $\mathcal{F}_t$-可測とする．このとき、$A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ が開集合ならば

$$\tau_A = \inf\{t \geq 0; X(t) \in A\}$$

は $\mathcal{F}_t$-停止時刻になる．実際，A が開集合ならば右連続性から

$$\{\tau_A < t\} = \bigcup_{s<t, s:\text{有理数}} \{X(s) \in A\} \in \mathcal{F}_t$$

で，これから $\mathcal{F}_t$ の右連続性により

$$\{\tau_A \leq t\} = \bigcap_{n\geq 1} \{\tau_A < t + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$$

となり，確かに τ_A は $\mathcal{F}_t$-停止時刻．少し面倒だが同様に A が閉集合のときも τ_A は $\mathcal{F}_t$-停止時刻になる．

定理 4.3 (Doob の任意抽出定理) $X(t)$ を $\mathcal{F}_t$-劣マルチンゲールとするとき，τ_1, τ_2 がともに有界な $\mathcal{F}_t$-停止時刻で $\tau_1 \leq \tau_2\ \ a.s.$ であるならば，

$$E[X(\tau_2) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] \geq X(\tau_1) \quad a.s.$$

が成り立つ．

マルチンゲールのときは上の不等式は等式になる．

定理 4.4 (Brown 運動の強マルコフ性) $B(t)$ を $\mathcal{F}_t$-Brown 運動，τ を $\mathcal{F}_t$-停止時刻とするとき，任意の $\xi \in \mathbf{R}$ と $t > 0$ に対して

(i) $\{\tau < \infty\}$ 上 *a.s.* で

$$E\left[e^{i\xi\left(B(\tau+t)-B(\tau)\right)}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = e^{-\frac{1}{2}\xi^2 t} \tag{4.1}$$

(ii) $B(\tau+t)-B(\tau)$ は $t \geq 0$ について Brown 運動，*i.e.*, 任意の $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ と $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対して

$$\begin{aligned} &P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{B(\tau+t_j)-B(\tau) \in A_j\}\right) \\ = &\int_{A_1} dx_1 \cdots \int_{A_n} dx_n \prod_{j=1}^{n} g(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

ただし，$x_0 = 0$ とし，$g(t,x)$ は ガウス核で

$$g(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

で与えられる．

補題 4.5 $\xi \in \mathbf{R}$ に対して $M_t(\xi) = e^{i\xi B(t) + \frac{t}{2}\xi^2}$ とおくと $M_t(\xi)$ は $\mathcal{F}_t$-マルチンゲール．

証明 $|M_t(\xi)| \leq e^{\frac{t}{2}\xi^2}$ なので $M_t(\xi)$ は有界で可積分．$\mathcal{F}_t$-適合性も形から明らか．$t > s$ として，

$$\begin{aligned} E\left[M_t(\xi)\middle|\mathcal{F}_s\right] &= e^{i\xi B(s)} E\left[e^{i\xi(B(t)-B(s))}\middle|\mathcal{F}_s\right] e^{\frac{t}{2}\xi^2} \\ &= e^{i\xi B(s) + \frac{t}{2}\xi^2} E\left[e^{i\xi(B(t)-B(s))}\right] \\ &= e^{i\xi B(s) + (\frac{t}{2} - \frac{t-s}{2})\xi^2} \\ &= M_s(\xi). \end{aligned}$$

補題 4.6 τ を $\mathcal{F}_t$-停止時刻とするとき，任意の $t > 0, \xi \in \mathbf{R}$ に対して $\{\tau < \infty\}$ 上 *a.s.* で

$$E\left[e^{i\xi(B_{\tau+t}-B_\tau)}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] = e^{-\frac{1}{2}\xi^2 t}$$

つまり定理 4.4 の (i) が成立する．

証明 自然数 $n \geq 1$ に対して $\tau_n = \tau \wedge n$ とおくと，これは有界な $\mathcal{F}_t$-停止時刻なので，補題 4.5 の $M_t(\xi)$ に対して任意抽出定理が使えて

$$E\left[M_{\tau_n+t}(\xi)\ \middle|\mathcal{F}_{\tau_n}\right] = M_{\tau_n}(\xi) \quad a.s.$$

という式が成り立つ．いま，任意の $A \in \mathcal{F}_\tau$ に対して $A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_{\tau_n}$ であるので，

$$E\left[M_{\tau_n+t}(\xi);\ A \cap \{\tau \leq n\}\right] = E\left[M_{\tau_n}(\xi);\ A \cap \{\tau \leq n\}\right]$$

となるが，$\{\tau \leq n\}$ 上では $\tau_n = \tau$ なので，

$$E\left[M_{\tau+t}(\xi);\ A \cap \{\tau \leq n\}\right] = E\left[M_\tau(\xi);\ A \cap \{\tau \leq n\}\right]$$

が任意の $A \in \mathcal{F}_\tau$ に対して成り立つ事になる．したがって任意の $n \geq 1$ に対して

$$E\left[e^{i\xi B_{\tau+t} + \frac{1}{2}\xi^2 t}\ \middle|\ \mathcal{F}_\tau\right] = e^{i\xi B_\tau} \quad a.s.\ \text{on}\ \{\tau \leq n\}$$

これは補題の主張を示している．

定理 4.4 の (ii) の証明は帰納法による．$\tau + t$ も $\mathcal{F}_t$-停止時刻である事に注意．