第3章　Brown 運動に関する確率積分

3.1　連続時間のマルチンゲール

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ が右連続性：

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \cap_{u>t}\mathcal{F}_u$$

をみたすものとする．

定義 3.1 フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)$ をもつ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ において，確率過程 $X(t) = X(t,\omega)$, $t \geq 0$ が $(\mathcal{F}_t)$-**マルチンゲール**であるとは,

(i) $E\big[|X(t)|\big] < \infty, \quad \forall t \geq 0,$

(ii) 任意の $t > s \geq 0$ に対して

$$E\big[X(t)|\mathcal{F}_s\big] = X(s) \quad P-a.s. \tag{3.1}$$

が成立する時にいう．

注意 離散時間のときと同様に，上の条件 (ii) は次の (ii)$'$ と同値である．
(ii)$'$ 任意の $t > s \geq 0$ と任意の $B \in \mathcal{F}_s$ に対して

$$\int_B X(t,\omega)P(d\omega) = \int_B X(s,\omega)P(d\omega) \tag{3.2}$$

Brown 運動のマルチンゲール性

後の便宜のためにフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)$ に関する Brown 運動を定義する．

定義 3.2 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ において，確率過程 $B(t)$ が，$(\mathcal{F}_t)$-Brown **運動**であるとは,

(i) 任意の $t \geq 0$ で $B(t)$ は $\mathcal{F}_t$-可測 （これを $(\mathcal{F}_t)$-**適合**という）.

(ii) $B(0) = 0 \quad P - a.s.$

(iii) 任意の $t > s \geq 0$ に対して， $B(t) - B(s)$ は $\mathcal{F}_t$ と独立で，平均 0, 分散 $t - s$ の Gauss 分布となる.

定理 3.1 $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動 $B(t)$ は $P - a.s.$ で次を満たす． $0 \leq s < t$ とする.

(i) $E(B(t) \mid \mathcal{F}_s) = B(s)$, つまり $B(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール.

(ii) $E(B(t)^2 - t \mid \mathcal{F}_s) = B(s)^2 - s,$ 　つまり $B(t)^2 - t$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール.

(iii) $E\left[e^{B(t)-\frac{t}{2}} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{B(s)-\frac{s}{2}}$, つまり $M_t = e^{B(t)-\frac{t}{2}}$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール.

練習問題 3.1 マルチンゲールの定義に従い，$(\mathcal{F}_t)$-*Brown* 運動の定義を用いて定理 *3.1* を証明せよ.

3.2 階段過程の確率積分

定義 3.3 $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ に対し，$(\mathcal{F}_t)$-適合な確率過程 $\Phi(t)$ が**階段型**とは，自然数 n, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty$ と有界な確率変数列 $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ があって，

(i) 各 ξ_j $(1 \leq j \leq n)$ は $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-可測，ξ_0 は $\mathcal{F}_0$-可測,

(ii) $\Phi(t) = 1_{\{0\}}(t)\xi_0 + \sum_{j=1}^{n} 1_{(t_{j-1}, t_j]}(t)\xi_j$

の 2 条件をみたすときにいう.

階段型確率過程の全体を $\mathcal{L}_0$ で表す.

定義 3.4 $\Phi \in \mathcal{L}_0$ に対して連続な確率過程 $I(\Phi)(t)$ を

$$I(\Phi)(t) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \big(B(t \wedge t_j) - B(t \wedge t_{j-1}) \big) \quad t \geq 0 \tag{3.3}$$

によって与える．ただし，$t \wedge s = \min\{s, t\}$ と約束する．$I(\Phi)(t)$ を Φ の *Brown* 運動による**確率積分**とよび，

$$\int_0^t \Phi(s)dB(s)$$

とも書く．

定理 3.2 (**確率積分の性質**)

(i) ($(\mathcal{F}_t)$-適合性) 任意の $t \in [0, \infty)$ に対して $I(\Phi)(t)$ は $\mathcal{F}_t$-可測

(ii) (連続性) $I(\Phi)(t)$ は t について連続 *a.s.*

(iii) (線形性)

$$I(\alpha\Phi + \beta\Psi)(t) = \alpha I(\Phi)(t) + \beta I(\Psi)(t) \quad a.s.$$

(iv) (マルチンゲール性)

$$E\big(I(\Phi)(t)\big|\mathcal{F}_s\big) = I(\Phi)(s) \quad a.s.$$

(v) (等長性)

$$E\big((I(\Phi)(t))^2\big) = E\int_0^t \Phi(s)^2 ds$$

さらに一般に $t > v$ のとき，

$$E\big[(I(\Phi)(t))^2 - E\int_0^t \Phi(s)^2 ds\big|\mathcal{F}_v\big] = I(\Phi)(v)^2 - E\int_0^v \Phi(s)^2 ds$$

練習問題 3.2 $(\mathcal{F}_t)$-*Brown* 運動の性質を用いて上の定理 *3.2* を証明せよ．

3.3 空間 $\mathcal{L}^2$ の元の確率積分

定義 3.5 確率過程 $\Phi = \Phi(t, \omega)$ が $(\mathcal{F}_t)$-**発展的可測**であるとは，任意の $t \geq 0$ に対して，$\Phi(s, \omega)$ を $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$ の関数と見たとき $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$-可測となることをいう．

注意　階段型過程は $\mathcal{F}_t$-発展的可測．また，一般に $\mathcal{F}_t$-発展的可測ならば，$\mathcal{F}_t$-適合．逆に，連続な $\mathcal{F}_t$-適合過程は $\mathcal{F}_t$-発展的可測．

なぜなら，$\Phi(t,\omega) = 1_{\{0\}}(t)\xi_0 + \sum_{j=1}^{n} 1_{(t_{j-1},t_j]}(t)\xi_j$ に対して，

$$\begin{aligned}&\{(s,\omega) \in [0,t] \times \omega;\ \Phi(s,\omega) \leq a\}\\&= \{0\} \times \{\omega \in \Omega;\ \xi_0(\omega) \leq a\} \cup \bigcup_{j=1}^{n} (t_{j-1}, t_j] \times \{\omega \in \Omega;\ \xi_j(\omega) \leq a\}\end{aligned}$$

となるので，階段型過程の発展的可測性がわかる．

Φ が発展的可測ならば，Fubini の定理により，$\mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{F}_t$-可測な $\Phi(s,\omega)$ の $s = t$ での切り口として $\Phi(t,\omega)$ は $\mathcal{F}_t$-可測．したがって Φ は $\mathcal{F}_t$-適合．

Φ が連続な $\mathcal{F}_t$-適合過程なら，階段型過程で各点近似できる．よって，Φ は上の事から $\mathcal{F}_t$-発展的可測．

定義 3.6（**空間** $\mathcal{L}^2$）　$\mathcal{F}_t$-発展的可測な確率過程 Φ で，任意の $T > 0$ に対して

$$E\left[\int_0^T |\Phi(t,\omega)|^2 ds\right] < \infty \tag{3.4}$$

となるものの全体を $\mathcal{L}^2$ と書く．$\Phi \in \mathcal{L}^2$ に対して，

$$\|\Phi\|_T := \{E\left[\int_0^T |\Phi(t,\omega)|^2 ds\right]\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

とおき，$\Phi, \Psi \in \mathcal{L}^2$ に対して

$$\|\Phi - \Psi\| := \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \left(\|\Phi - \Psi\| \wedge 1\right) \tag{3.6}$$

とおく．$\|\Phi - \Psi\| = 0$ のとき，二つの確率過程は $\mathcal{L}^2$ の元としては同一視する．

注意　$\|\cdot\|$ により $\mathcal{L}^2$ は完備な距離空間となる．それは，$\mathcal{L}_T^2$ を $\|\cdot\|_T$ をノルムとするヒルベルト空間と思うと，その完備性から，ここでの極限 $X(t)$ が $\mathcal{L}^2$ のコーシー列に対して定まる．この極限は T について consistent.

補題 3.3　　$\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}^2$ の中で *dense*.

証明は次回