II の計算に移ろう．

$$\begin{aligned}
2II &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)})\Big[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})\Big]^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)})\left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\right)^2 \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)}) \left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\right)\left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} b(s,\omega)ds\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)})\left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} b(s,\omega)ds\right)^2 \\
&:= II_1 + II_2 + II_3
\end{aligned}$$

f'' の一様連続性と，b の有界性，確率積分の連続性により，$n \to \infty$ のとき，$II_2, II_3 \to 0$ $a.s.$ は簡単にわかる．II_1 の収束を計算するために補題を一つ用意する。

補題 3.8 $a \in \mathcal{L}^2$ が $\sup_{s,\omega}|a(s,\omega)| \leq M$ を満たすものとする。このとき、任意の $t > 0$ と $[0,t]$ の任意の分割 Δ:

$$\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < \beta(n) = t\}$$

に対して

$$E\left[\left\{\sum_{j=1}^{\beta(n)}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s,\omega)dB(s)\right)^2\right\}^2\right] \leq 3M^4t^2$$

が成り立つ。

証明　まず、$a \in \mathcal{L}_0$ として、a の分点がすべて Δ の分点を含むとして良い。このとき各小区間 $(t_{j-1}, t_j]$ では a は一定の値 ξ_j をとり、ξ_j は $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-可測である。したがって、

$$\begin{aligned}
&E\left[\left\{\sum_{j=1}^{\beta(n)}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s,\omega)dB(s)\right)^2\right\}^2\right] \\
&= \sum_{j=1}^{\beta(n)} E\left[(\xi_j)^4\right] E\left[(B(t_j) - B(t_{j-1}))^4\right] \\
&+ 2\sum_{1\leq j<k\leq\beta(n)} E\left[\xi_j^2(B(t_j) - B(t_j - 1))^2\xi_k^2 E\big[(B(t_k) - B(t_{k-1}))^2\big]\right] \\
&\leq M^4 3|t_j - t_{j-1}|^2 + 2M^4 \sum_{1\leq j<k\leq\beta(n)} |t_j - t_{j-1}||t_k - t_{k-1}| \\
&\leq 3M^4\left(\sum_{j=1}^{\beta(n)}|t_j - t_{j-1}|\right)^2 = 3M^4t^2
\end{aligned}$$

よって $a \in \mathcal{L}_0$ のときは正しい。

一般の有界な $a \in \mathcal{L}^2$ に対しては $\mathcal{L}_0$ の元 a_N で $\mathcal{L}^2$ で近似できるが、この a_N も $|a_N| \leq M$ ととる事ができる。このとき、L^2 で $\int_0^t a_N(s)dB(s)$ は $\int_0^t a(s)dB(s)$ に近づくので、マルチンゲールの不等式から

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t (a_N(s) - a(s))dB(s)\right|\right)^2\right] \\
&\leq 4E\left[\left|\int_0^T (a_N(s) - a(s))dB(s)\right|^2\right]
\end{aligned}$$

で、右辺は 0 に近づく。部分列をとることにより、

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t (a_N(s) - a(s))dB(s) \to 0 \qquad a.s.$$

とできる。

Fatou の補題により、

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left\{\sum_{j=1}^{\beta(n)}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s,\omega)dB(s)\right)^2\right\}^2\right] \\
&= E\left[\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\beta(n)}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a_N(s,\omega)dB(s)\right)^2\right\}^2\right] \\
&\le \lim_{N\to\infty} E\left[\left\{\sum_{j=1}^{\beta(n)}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a_N(s,\omega)dB(s)\right)^2\right\}^2\right] \\
&\le 3M^4t^2
\end{aligned}
$$

□

さて、定理の証明に戻ろう。

$$
\begin{aligned}
II_1 &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(X(t_{j-1}^{(n)}))\left[\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j-1}^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\right]^2 \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\beta(n)}[f''(\theta_j^{(n)}) - f''(X(t_{j-1}^{(n)}))]\left[\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j-1}^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\right]^2 \\
&:= II_{1,a} + II_{1,b}
\end{aligned}
$$

$E|II_{1,b}| \to 0$ である．なぜなら，

$$
\begin{aligned}
E|II_{1,b}| &\le \left(E\big[\sup_{\substack{u,v\in[0,t]\\ |u-v|\le 2^{-n}}} |f''(X(u)) - f''(x(v))|\big]^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times\left(E\big[\sum_{j=1}^{\beta(n)}\big(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\big)^2\big]^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

補題 3.8 および $f''(X(s))$ の有界性と一様連続性により $E|II_{1,b}|$ は 0 に収束する．$II_{1,a}$ の代わりに

$$
III = \sum_j f''(X(t_{j-1}^{(n)}))a(t_{j-1}^{(n)})^2(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)})
$$

を考えると、これは $f''(X(s))$ の連続性から $n\to\infty$ のとき

$$
\int_0^t f''(X(s))a(s)^2ds
$$

に収束する。あとは

$$
E\left[|II_{1,a} - III|^2\right] \to 0
$$

を示せば良い。定理 3.5 の等長性により

$$
\left(\int_0^t a(s)dB(s)\right)^2 - \int_0^t a(s)^2ds
$$

が $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールであるので、

$$
\begin{aligned}
&E\left[|II_{1,a} - III|^2\right] \\
&= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(X(t_{j-1}))^2\left(\big(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)dB(s)\big)^2 - \int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)^2ds\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(X(t_{j-1}))^2\big(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)dB(s)\big)^4 \\
&- 2\sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(X(t_{j-1}))^2\big(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)dB(s)\big)^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)^2ds \\
&+ \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(X(t_{j-1}))^2\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)^2ds\right)^2 \\
&=: IV_a + IV_b + IV_c
\end{aligned}
$$

IV_b, IV_c が 0 に収束することは II_2, II_3 が 0 に収束するのと同じ理由による。また、補題 3.8 を $[0,t]$ の代わりに区間 $[t_{j-1}, t_j]$ で使うと、

$$
E\left[\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)dB(s)\right)^4\right] \le 3M^4|t_j - t_{j-1}|^2
$$

を得る。これから f'' が有界な事と合わせると IV_a が 0 に収束する事が分かる。

（一般の f, a, b の場合は，停止時刻を用いた議論をする．）　□