練習問題の解答

練習問題 1.1　$\mathcal{F}^* = \cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}_\lambda$ と書いておく。これが Ω の σ-加法族である事を確かめれば良い。

(a)　$\Omega \in \mathcal{F}^*$ であること：
任意の $\lambda \in \Lambda$ を取ってきた時、$\mathcal{F}_\lambda$ は Ω の σ-加法族だから、$\Omega \in \mathcal{F}_\lambda$.
したがって Ω はどの $\lambda \in \Lambda$ に対しても $\Omega \in \mathcal{F}_\lambda$ であるから

$$\Omega \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}^*$$

(b)　$A \in \mathcal{F}^*$ ならば $A^c \in \mathcal{F}^*$ である事：
$A \in \mathcal{F}^*$ より、 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A \in \mathcal{F}_\lambda$ で、$\mathcal{F}_\lambda$ は Ω の σ-加法族だから、$A^c \in \mathcal{F}_\lambda$. これが任意の $\lambda \in \Lambda$ で成り立つので、

$$A^c \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}^*$$

(c)　任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して各 A_n は $A_n \in \mathcal{F}_\lambda$ したがって、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_\lambda$$

これは任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して成り立つので、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}^*$$

練習問題 1.2　これも $\mathcal{P}(\Omega)$ が $(a) \sim (c)$ を満たす事を確かめれば良い。

(a)　Ω は自分自身の部分集合だから $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$

(b)　$A \in \mathcal{P}(\Omega)$ とする。つまり、$A \subset \Omega$ とする。このとき、

$$A^c = \{\omega \in \Omega\,;\, \omega \notin A\} \subset \Omega$$

だから、 $A^c \in \mathcal{P}(\Omega)$

(c)　$A_n \in \mathcal{P}(\Omega), n = 1, 2, \ldots$ とする。このとき、

$$A_n \subset \Omega, n = 1, 2, \ldots \text{ なので、} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \Omega$$

となり、$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$.

講評　σ 加法族の議論は何をいったら証明した事になるのか理解するまでに時間がかかります。練習問題 1-1 は講義でやった命題 1.2 の証明を真似れば出来るので、何とかできた人は多かったです。ただ、練習問題 1.2 のほうは、どうして良いのか途方に暮れた人が多かったようです。上のように分かってみれば、難しい事では無いのですが。復習しておいて下さい。定義の条件を確かめるという手続きを体得して下さい。