練習問題の解答

練習問題 2.4　さいころを振り続けることを考える．n 回目にでた目の数を X_n と書くと，$\{X_n\}$ は独立，同分布の確率変数列になる．ボレル-カンテリの第２補題 (定理 2.6, (ii)) により，確率１で無限個の n について $X_n = 6$ が起こることを確かめよ．したがってもちろん６の目はいつかは必ず（正確には確率１で）出るといっていい.（ヒント：$A_n = \{X_n = 6\}$ とおく.）

解答　任意の n に対して $P(X_n = 6) = \frac{1}{6}$ だから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 6) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{6} = \infty$$

$\{X_n\}$ は独立だから Borel-Cantelli の第二補題から

$$P(\ X_n = 6 \text{ となる } n \text{ が無限にある}) = 1$$

講評　(i) は単に $\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(t)$ という関数を $-\infty$ から x まで積分したものが $F(x)$ なのですが、そのことが皆さんにあまり伝わらなかったようです。本当はこれが一番易しいのですが。

(ii) と (iii) は階段関数が出てきます。例でもやったので、理解できた人も結構いましたが、積分と和とがごっちゃになった人も見受けられました。こういう風に離散的な値を取る確率変数では $F(x)$ は

$$F(x) = \sum_{i\leq x} \mu(i)$$

と書けます。問題で $\mu(i)$ と書くべきところを $P(i)$ と書いたため混乱した人もいたことでしょう。済みません。