練習問題の解答

練習問題 1.3　$A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \ldots$ のとき、

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

が成り立つ事を示せ。(このためには $B_n = A_n \cap (A_1 \cup \ldots A_{n-1})^c$ を考えると良い。)

解答　$B_n = A_n \cap (A_1 \cup \ldots A_{n-1})^c$ とおく。$\omega \in B_n$ ということは、$\omega \in A_n$ だが、n より小さい k については $\omega \notin A_k$ となる。つまり、ω が属する A_k 達のうちで一番番号の若いものが A_n であるという事である。明らかに $B_n \subset A_n$ なので、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

だが、じつは

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

である。なぜなら、$\omega \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ とすると、どれかの n で $\omega \in A_n$ となっている。このような n の一番小さいものを n_0 とする。つまり、

$$n_0 = \min\{n \geq 1\,;\, \omega \in A_n\}$$

とする。このとき $\omega \in B_{n_0}$ である。したがって

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

となり、逆の包含関係も言えた。

また、$\{B_n\}$ は互いに排反である。実際、 $n < m$ のとき、$B_m \subset (A_1 \cup \ldots \cup A_{m-1})^c \subset A_n^c$ なので、

$$B_m \cap B_n \subset A_n^c \cap A_n = \emptyset$$

さて、以上の事から、

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$$

となるが、命題 1.4 により、各 n について $P(B_n) \leq P(A_n)$ なので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

これで求める不等式が得られた。

別解　系 1.5 により帰納法で任意の n に対して

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

を言う事が出来、$\cup_{k=1}^{n} A_k$ は n について単調に増加しているので、

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \to P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

$\cup_{n=1}^{\infty} \cup_{k=1} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ である。なぜなら、左辺がすべての A_n を含む事は明らかだが、左辺の和集合に登場するのは $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ だけであるから、左辺は右辺より大きくはなれない。したがって等号が成り立つ。これより、$n \to \infty$ のとき

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

となる。

講評　これは難しかったですね。

ヒントの B_n の意味が分かった人は最後まで証明できていましたが、命題 1.6 の証明に出てくる B_n のことだと思った人も多く、まったく違った事を証明していました。

帰納法で

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

まで証明できた人は結構いましたが、これから $n \to \infty$ とする事が無条件では出来ない事を用心している人は少なかったですね。帰納法で $n = \infty$ と出来ると書いた人も多かったけど、帰納法ではどう頑張っても有限の n についての式しか出ません。この辺の微妙さを感じとれるようになれば、解析のセンスがだいぶついた事になります。そのうち易しい問題も出しますからあきらめずに頑張って下さい。