# 練習問題の解答

**練習問題 1.5**　$X \geq 0$ が常に成り立つとする．このとき，$EX = 0$ ならば $P(X = 0) = 1$ となることを次の順で証明せよ．

(i)　自然数 $n \geq 1$ に対して $A_n \in \mathcal{F}$ を

$$A_n := \{\omega \in \Omega; X(\omega) \geq \frac{1}{n}\}$$

とおく．このとき，

$$P(A_n) \leq nE[X; A_n] \leq nEX$$

を示せ．

(ii)　任意の自然数 $n$ に対して $P(A_n) = 0$ を示せ．

(iii)　$\{\omega \in \Omega; X(\omega) > 0\} = \cup_{n\geq 1} A_n$ であることから $P(X > 0) = 0$ を示せ．(練習問題 1.3 を使う) これは $P(X = 0) = 1$ を示している．

**解答**　(i) $\omega \in A_n$ のとき $X(\omega) \geq \frac{1}{n}$ だから、

$$X(\omega)1_{A_n}(\omega) \geq \frac{1}{n}1_{A_n}(\omega)$$

この両辺の期待値を取ると、

$$E\left[X1_{A_n}\right] \geq \frac{1}{n}P(A_n)$$

$X \geq 0$ だから $X(\omega) \geq X(\omega)1_{A_n}(\omega)$ で、期待値を取ると、

$$EX \geq E\left[X1_{A_n}\right] = E[X\,; A_n]$$

となる。これより、

$$EX \geq E[X\,; A_n] \geq \frac{1}{n}P(A_n)$$

$n$ 倍して

$$P(A_n) \leq nE[X\,; A_n] \leq nEX$$

(ii) (i) で、仮定から $EX = 0$ だから、これを代入すると

$$P(A_n) \leq 0$$

左辺は確率なので、 0 以上だからこれは

$$P(A_n) = 0$$

を意味している。

(iii)

$$P(X \geq 0) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 0$$

が (ii) から言える。

**講評**　(i) の出来が一番悪かったですね。Chebyshev の不等式の使い方が良く分からなかったようで、何をどうしろと言われているのか分からないと言う答案が目立ちました。今後、練習を用意する事にします。。Chebyshev の不等式は確率論で良く使われるので、ぜひその使い方をマスターして下さい。

(ii) のできは、$EX = 0$ という条件を (i) で示した不等式の右側に使えるという事に気がつくかどうかが、正解を出すか否かの分かれ目でした。気がついた人はスイスイと解いています。

(iii) は確率の劣加法性 $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ を使えば、(ii) の結果からすぐに出ます。(ii) が出来た人はスムーズにこれも出来ている人が多かったです。