練習問題の解答

練習問題 1.6-extra 成功の確率 p の幾何分布について期待値 EX と分散 $V(X)$ を求めよ。また、この X について X の分布 μ_X の母関数 $G_X(t)$ を

$$G(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} P(X = k)$$

とするとき、$G(t)$ を求めよ

解答　X を成功の確率 p の幾何分布に従う確率変数とすると、X は $\{0, 1, \ldots\}$ に値を取り、

$$P(X = k) = (1-p)^k p \qquad k = 0, 1, \ldots$$

となるので、

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k = p(1-p)\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

ここで $|x| < 1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

だから、両辺を x で微分する事が出来[1]

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{1}$$

(1) に $x = 1-p$ を代入して $\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = (1-(1-p))^{-2} = p^{-2}$ だから、

$$EX = \frac{p(1-p)}{p^2} = \frac{1-p}{p}$$

分散を求めるために、 EX^2 を求める。

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^k p = \sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1)+k)(1-p)^k p \\
&= p(1-p)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + EX \\
&= \frac{2p(1-p)^2}{(1-(1-p))^3} + \frac{1-p}{p} \\
&= 2\frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p}
\end{aligned}$$

3 行目の等式は (1) を x で微分すると

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

[1] この冪級数の収束半径は 1 だから、$|x| < 1$ のとき、項別微分が出来る事は関数論で習った通り

となり、これに $x=1-p$ を代入する事で得られる。従って、

$$V(X)=EX^2-(EX)^2=\frac{(1-p)^2}{p^2}+\frac{1-p}{p}=\frac{1-p}{p^2}$$

となる。

X の母関数を求めよう。

$$G(t)=E(e^{tX})=\sum_{k=0}^{\infty}e^{tk}P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}p\{(1-p)e^t\}^k=\frac{p}{1-(1-p)e^t}$$

講評　思ったより出来は良くありませんでした。一つには幾何分布の定義がちゃんとかいていなかった事によるもので、反省しています。多くの人が

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^2(1-p)^k$$

の計算でつまづいていました。高校の時にやった計算で、似た計算はありますが、やはり、テイラー展開を知っているのだから、上のような計算をして欲しいものです。難しい計算をしなくても微分するだけで答えが出るのだからこちらの方法の方が易しいと思うのですが。どうですか？

最後の母関数は $G(t)$ の様な形に書いたり

$$\sum_{k=0}^{\infty}z^nP(X=k)\quad |z|<1$$

の形に書いたりします。