練習問題の解答

練習問題 1.6 例 1.2, 1.3, 1.4 で，すべての k について $P(X=k)$ の和を取ると 1 になることを確かめよ．ただし，$k>N$ のとき $\binom{N}{k}=0$ とする．
解答　例 1.2 の 2 項分布については、2 項定理から

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k}$$

だから、

$$\sum_{k=0}^{N} P(X=k) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = (p+1-p)^N = 1$$

例 1.3 のポアソン分布については e^λ の原点におけるテイラー展開により、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$$

だから、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda-\lambda} = 1$$

例 1.4 の負の 2 項分布についてはやはりテイラー展開により

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

だから、

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} (1-p)^k p^n = (1-(1-p))^{-n} p^n = 1$$

となる。

練習問題 1.7 例 1.5 において, $\mu_X(\mathbf{R})=1$ を確かめよ．また，例 1.6 で，$\mu_X([0,\infty))=1$ を確かめよ．
解答　例 1.5 については講義で計算したので省略する。例 1.6 については

$$\mu_X([0,\infty)) = P(X\in[0,\infty)) = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = 1$$

と計算すれば良い。

講評　良くできていました。数 III, C を取ってない人には無限級数の計算は難しいでしょう。しかし、上に出てきた式はすべてテイラー展開で得られるもので、微分積分学 1 の中で講義に出てくるものです。全く分からないものではありません。微分積分学の教科書を開いてみて下さい。