練習問題の解答

練習問題 1.8　$n \geq 2$ を自然数として $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $X(\omega) = \sin(n\pi\omega)$ とおくとき、$X^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}])$ を求めよ。
解答

$$X^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}]) = \{\omega \in [0,1]\,;\, \frac{1}{2} \leq \sin(n\pi\omega) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

である。 $\sin x = \frac{1}{2}$ を一般角で解くと、$x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$ とかける。$n\omega = k\pi + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}$ で、 $\omega \in [0,1]$ を満たすものは n が偶数ならば $0 \leq k \leq n-1$, n が奇数ならば $0 \leq k \leq n$ となる。

同様に $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を一般角で解くと $x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4}$ である。

$\sin(n\pi\omega)$ は $[\frac{2k}{n}, \frac{2k+1}{n}]$ で正の値を取り、$[\frac{2k}{n}, \frac{4k+1}{2n}]$ で単調増加で、$[\frac{4k+1}{2n}, \frac{2k+1}{n}]$ では単調減少であるので、求める逆像は

$$X^{-1}(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]) = \bigcup_{k=0}^{n'} \left[\frac{12k+1}{6n}, \frac{8k+1}{4n}\right] \cup \left[\frac{8k+3}{4n}, \frac{12k+5}{6n}\right]$$

となる。ただし、 n' は n が偶数ならば $n-1$, 奇数ならば n とする。
練習問題 1.9　$\omega \in [0,1]$ に対して

$$X(\omega) = 1 + \lfloor 6\omega \rfloor$$

とおく。このとき、$X^{-1}([0, 2.5])$ を求めよ。ただし、実数 u に対して $\lfloor u \rfloor$ は u を越えない最大の整数とする。
解答　X は $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ にのみ値を取るので、

$$X^{-1}[0, 2.5] = X^{-1}(\{1,2\})$$

である。$X(\omega)$ は ω について単調非減少なことに注意すると、$X(\frac{1}{3}) = 3$ であり、$\omega < \frac{1}{3}$ のとき $6\omega < 2$ となり $X(\omega) < 3$ だから $X(\omega) \in \{1,2\}$ したがって

$$X^{-1}([0, 2.5]) = [0, \frac{1}{3})$$

練習問題 1.10　例 1.10 で、

(1) $X_3^{-1}(1)$ を求めよ。

(2) $X_n^{-1}(1)$ を求めよ。

(3) $Y(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega)$ とおく。このとき、$Y^{-1}(\{1\})$ を求めよ。

解答　(1)　2 進法展開の小数点以下第 3 項が 1 になるので、$\omega \in [0,1]$ の展開が $001\cdots, 011\cdots, 101\cdots, 111\cdots$ のどれかになっている。

(a) $001\cdots$ となるとき、 $\frac{1}{8} \leq \omega < \frac{1}{4}$

(b) $011\cdots$ となるとき、 $\frac{3}{8} \le \omega < \frac{1}{2}$

(c) $101\cdots$ となるとき、 $\frac{5}{8} \le \omega < \frac{3}{4}$

(d) $111\cdots$ となるとき、 $\frac{7}{8} \le \omega < 1$

なので、結果として

$$X_3^{-1}(1) = \bigcup_{j=1}^{4}[\frac{2k-1}{8}, \frac{k}{4})$$

(2) $\omega \in [0,1]$ に対して $2^n\omega$ の整数部分を見ると、

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j 2^j + 1 \qquad (\varepsilon_j = 0 \text{ or } 1)$$

と書けている。したがってこれは 2^n より小さい奇数の全体を動く。結果、答えは

$$X_n^{-1}(\{1\}) = \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}}[\frac{(2j-1)}{2^n}, \frac{j}{2^{n-1}}]$$

となる。

(3) これは ω を 2 進法展開したとき、小数点以下第 3 位までに 1 が一つしか出て来ないという事なので、 $001\cdots, 010\cdots, 100\cdots$ の展開を持つ。それぞれの場合に対応する区間は

(a) $001\cdots$ となるとき、 $\frac{1}{8} \le \omega < \frac{1}{4}$

(b) $010\cdots$ となるとき、 $\frac{1}{4} \le \omega < \frac{3}{8}$

(c) $100\cdots$ となるとき、 $\frac{1}{2} \le \omega < \frac{5}{8}$

なので、

$$Y^{-1}(\{1\}) = [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$$

練習問題 1.11　X が成功の確率 p の負の二項分布 $NB(n,p)$ に従う時、つまり $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して $P(X = k) = \binom{n+k-1}{k}(1-p)^k p^n$ のとき、期待値は $n(1-p)/p$, 分散は $n(1-p)/p^2$ である。これを使ってチェビシェフの不等式により、

$$P(X \ge 2n(1-p)/p) \le \frac{1}{n(1-p)}$$

を確かめよ。

解答　$Y = (X - EX)^2 \ge 0$ であり、$f(x) = x^2$ は $[0, \infty)$ 上で非負単調増加なので、チェビシェフの不等式により、

$$\begin{aligned} P(X \ge 2n(1-p)/p) &= P(X - EX \ge n(1-p)/p) \\ &= P(Y \ge n^2(1-p)^2/p^2) \\ &\le \frac{\mathrm{Var}(X)}{n^2(1-p)^2/p^2} = \frac{1}{n(1-p)} \end{aligned}$$

講評

練習問題 1.8　三角関数の一般角の問題としては高校でも計算していたと思いますが、結構難しかったようです。いろいろな間違いがありましたが、答えがたくさんの区間の和集合になる事を気づかない人が多かったです。グラフはちゃんと書けているのに答えが正しくない人も多く、三角関数の入った不等式を解く経験が以外に少なかった人が多いようです。

練習問題 1.9　ガウス記号のついた関数のグラフに慣れていない人が結構います。これも不等式の問題なので、高校で習った範囲なのですが。

練習問題 1.10　これが一番できは良かったです。最後の問題は X_1, X_2, X_3 のうち、どれか一つだけが 1 となる場合を求めれば良いので、前の問題ができていれば割りと簡単だったようです。

練習問題 1.11　これもこけ脅しの問題で、期待値と分散が与えられているので、チェビシェフの不等式を使えば具体的な分布の形は関係なく計算できます。チェビシェフの不等式が使えるかどうかが分かれ目でした。チェビシェフの不等式は良く出てきますから、覚えるようにして下さい。（悪い事は言いません。必ず覚えておくように！）