練習問題の解答

練習問題 1.12　次の分布の分布関数を求めよ.

(i) 区間 $[a,b]$ 上の**一様分布**は

$$\mu(A) = \frac{1}{b-a}\int_{A\cap[a,b]} dx$$

である.

(ii) 2 項分布 $B(3, 0.5)$.

(iii) パラメータ 1 のポアソン分布

解答　(i) 分布関数の定義から、

$$\begin{aligned} F(x) = \mu((-\infty, x]) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(s)\,ds \\ &= \begin{cases} 0, & x \le a \text{ のとき} \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \text{ のとき} \\ 1, & b \le x \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) この分布は $0, 1, 2, 3$ の 4 点に値を取る確率変数 X の分布で、

$$\mu(\{i\}) = \binom{3}{i}(0.5)^i(1-0.5)^{3-i} = \binom{3}{i}\frac{1}{8}$$

となる。したがって分布関数は

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ のとき} \\ \frac{1}{8}, & 0 \le x < 1 \text{ のとき} \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \text{ のとき} \\ \frac{7}{8}, & 2 \le x < 3 \text{ のとき} \\ 1, & 3 \le x \text{ のとき} \end{cases}$$

(iii) μ をパラメータ 1 のポアソン分布とすると、0 以上の自然数でのみ μ は値を持ち

$$\mu(i) = \frac{1}{i!}e^{-1}$$

となる。したがって分布関数は

$$F(x) = \sum_{0\le i\le x} \frac{1}{i!}e^{-1}$$

となる。

講評　(i) は単に $\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(t)$ という関数を $-\infty$ から x まで積分したものが $F(x)$ なのですが、そのことが皆さんにあまり伝わらなかったようです。本当はこれが一番易しいのですが。

(ii) と (iii) は階段関数が出てきます。例でもやったので、理解できた人も結構いましたが、積分と和とがごっちゃになった人も見受けられました。こういう風に離散的な値を取る確率変数では $F(x)$ は

$$F(x) = \sum_{i \le x} \mu(i)$$

と書けます。問題で $\mu(i)$ と書くべきところを $P(i)$ と書いたため混乱した人もいたことでしょう。済みません。