# 練習問題の解答

**練習問題 2.1**　$X, Y$ が確率変数であるとき，組 $X, Y$ の**同時分布** $\mu_{X,Y}$ とは $\mathbf{R}^2$ 上の確率で，任意のボレル集合 $A, B$ に対して

$$\mu_{X,Y}(A \times B) = P(X \in A, Y \in B)$$

によって定義される．ただし， $A \times B$ は

$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x \in A, y \in B\}$$

で定義される直積図形である．このとき，$X$, $Y$ が独立ならば，

$$\mu_{X,Y}(A \times B) = \mu_X(A)\mu_Y(B)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mu_X, \mu_Y$ はそれぞれ $X, Y$ の分布である．

**解答**　$\mu_{X,Y}$ の話を $P$ の話に書き換えれば良い。

$$\begin{aligned}
\mu_{X,Y}(A \times B) &= P\left((X, Y) \in A \times B\right) \\
& P(\{X \in A, and Y \in B\}) \\
& = P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) \\
& = P(X \in A)P(Y \in B) \qquad \because\ X, Y \text{ は独立} \\
& \mu_X(A)\mu_Y(B)
\end{aligned}$$

□

**練習問題 2.2**　$X, Y$ が独立で，$X^2, Y^2$ が可積分のとき，

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

がなりたつことを証明せよ．ついでに

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

が成り立つことも証明せよ．

**解答**　$X, Y$ の代わりに $\tilde{X} = X - EX$, $\tilde{Y} = Y - EY$ について考える。

$$V(X + Y) = E\left[(X + Y - E(X + Y))^2\right] = V(\tilde{X} + \tilde{Y})$$

だから、最初から $X, Y$ の期待値は 0 として示せば良い。

$$V(X + Y) = E\left[(X + Y)^2\right] = E\left[X^2 + Y^2 + 2XY\right]$$

で、独立性から

$$E[XY] = EXEY = 0$$

だから、

$$V(X+Y) = EX^2 + EY^2 = V(X) + V(Y)$$

また、

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left[(X-EX)^2\right] = E\left[X^2 - 2E(XEX) + (EX)^2\right] \\ &= E(X^2) - 2(EX)^2 + (EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2 \end{aligned}$$

□

**練習問題 2.3**　大数の法則は同分布でなくても成り立つ．$\{X_n\}$ を独立で期待値が 0 の確率変数列とする．さらにある定数 $C >$ に対して

$$V(X_n) = \sigma_n^2 \le C \qquad n = 1, 2, \dots \tag{1}$$

とする．

(i)　チェビシェフの不等式を使って

$$P\big(|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon\big) \le \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

を示せ．

(ii)　このとき大数の弱法則が成立することを証明せよ．

**解答**　(i)

$$ES_n^2 = \sum_{j=1}^{n} EX_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j+1}^{n} E(X_jX_k) = \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 \le Cn$$

だから、チェビシェフの不等式より、

$$P\big(|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon\big) \le \frac{E(S_n^2)}{\varepsilon^2 n^2} \le \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

(ii) (i) で $n \to \infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\big) = 0$$

これは大数の弱法則が成り立つ事を言っている。　□

**講評**