練習 1.1 の解答と講評

練習 1.1

(1)　$9-16x^2=(3-4x)(3+4x)$ だから 部分分数に展開して

$$\frac{1}{(3-4x)(3+4x)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3-4x}+\frac{1}{3+4x}\right)$$

したがって、

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{9-16x^2}\,dx&=\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{3-4x}+\frac{1}{3+4x}\right)dx\\&=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}\log|3-4x|+\frac{1}{4}\log|3+4x|\right)+C\\&=\frac{1}{24}\log\left|\frac{3+4x}{3-4x}\right|+C\end{aligned}$$

講評　計算間違いが多かったです。 部分分数の展開を間違えた人が数名、

$$\int\frac{1}{ax+b}\,dx$$

の計算間違いが多数です。 $y=ax+b$ と置き換えてみると、$dy=adx$ つまり、$dx=\frac{1}{a}dy$ ですから、

$$\int\frac{1}{ax+b}\,dx=\int\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{a}dy=\frac{1}{a}\log|y|+C=\frac{1}{a}\log|ax+b|+C$$

と $\dfrac{1}{a}$ がつくのを忘れた人が多かったです。注意すれば間違えずに済む間違いでした。

(2)　分母の 2 次式 x^2+2x+5 の判別式は負だから、平方完成して $(x+1)^2+4$ となる。$y=\frac{x+1}{2}$ とおくと、$dy=\frac{1}{2}dx$, $(x+1)^2=4y^2$ であるから

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{2dy}{4(y^2+1)}=\int\frac{dy}{2(1+y^2)}$$

$y=\tan t$ とおいて $dy=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$ また、

$$1+y^2=1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$$

だから、

$$\int\frac{dy}{2(1+y^2)}=\int\frac{\cos^2 t}{2\cos^2 t}\,dt=\frac{t}{2}+C$$

$t=\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x+1}{2}$ なので、結局

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{2}+C$$

となる。

講評　まずまずの出来でした。間違った人の多くは ($a > 0$ のとき)

$$\int \frac{1}{a^2+y^2}\,dy = \tan^{-1}\frac{y}{a}$$

としていました。正しくは

$$\int \frac{1}{a^2+y^2}\,dy = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{y}{a}$$

ですね。

(3)　$y = \cos x$ とおくと、$dy = -\sin x dx$ だから、

$$\int \frac{\sin x}{16+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{16+y^2}\,dy$$

(2) で言ったように、右辺は $\dfrac{1}{4}\tan^{-1}\dfrac{y}{4} + C$ と書けるので、$y = \cos x$ を代入して

$$\int \frac{\sin x}{16+\cos^2 x}\,dx = -\frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{\cos x}{4} + C$$

講評　これもまずまずの出来でした。(2) を間違えた人はほとんどこの問題も間違えています。y についての置換積分を実行する時は $y = 4\tan t$ とおく事になります。

(4)　この問題は解き方もいろいろあるので、答えの形もいくつかあります。まずは倍角の公式を使うと、

$$1+\cos 2x = 2\cos^2 x, \quad \sin^2 2x = 4\sin^2 x\cos^2 x$$

だから、

$$\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx = \int \frac{1}{2\sin^2 x}\,dx$$

ここで、

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

を思い出すと、

$$\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx = -\cot x + C$$

となります。思い出さずに $t = \tan\frac{x}{2}$ とおいても計算できます。

$$dt = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2}dx = \frac{1+t^2}{2}dx \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

また、

$$\sin x = 2\frac{t}{1+t^2}$$

と書けるので、

$$\int \frac{1}{2\sin^2 x}\,dx = \int \frac{(1+t^2)^2}{4t^2}\frac{2}{1+t^2}dt = -\frac{1}{2t}+\frac{t}{2}+C = -\cot\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+C$$

となります。右辺を計算するとやはり $-\cot x + C$ が出てきます。

積分を二つに分けて

$$\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 2x}\,dx + \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx$$

として、第 1 項は上と同じ議論で $-\frac{1}{2\tan 2x}+C$ とし、第 2 項では $\sin 2x = t$ とおくと、$2\cos 2x dx = dt$ だから

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx = \int \frac{1}{2t^2}\,dt = -\frac{1}{2t}+C = -\frac{1}{2\sin 2x}+C$$

となるので、あわせて、

$$\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx = -\frac{1}{2\tan 2x}-\frac{1}{2\sin 2x}+C$$

というのも OK です。

$t = \tan x$ とおいても良いですね。このとき、$\cos 2x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ および $\sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ で、$dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$ なので、

$$dx = \frac{1}{1+t^2}$$

となります。これより、

$$\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx = \int \frac{(1+t^2)^2+(1-t^4)}{4t^2}\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{4t^2}\,dt = -\frac{1}{2t}+C$$

と計算できます。$t=\tan x$ を代入すると、求める式になります。

講評　これは手がついていない人も多かったです。倍角の公式を使って

$$\int \frac{1}{2\sin^2 x}\,dx$$

まで計算できた人は結構いました。あとは必殺の $t = \tan\frac{x}{2}$ とおくか、これが $-\frac{1}{2}\cot x$ と見破るかすればいいわけです。

(5)　これも部分分数展開をして

$$\frac{4}{1-4x^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}-x^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}-x}+\frac{1}{\frac{1}{2}+x}$$

だから、

$$\int \frac{4}{1-4x^2}\,dx = -\log|\frac{1}{2}-x| + \log|\frac{1}{2}+x| + C = \log\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right| + C$$

講評　これも (1) と同じ間違いをした人が多かったです。積分をするときも x の前の係数に注意をして下さい。結局は置換積分をちゃんとやれば良いのです。大方の人は出来ていました。