

## 練習問題の解答と講評

### 練習 2.1

$$(1) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$$

根号の中が 2 次式なので、2 次の係数が正である事から

$$t = x + \sqrt{x^2 - x + 1} \quad \text{i.e.,} \quad t - x = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

とおきます。これから右側の式を 2 乗して  $x$  について解くと

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}, \quad dx = \frac{2(t^2 - t + 1)}{(2t - 1)^2} dt$$

また、

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = t - x = \frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2}$$

となるので、置換積分を実行すると

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x+1}} dx &= \int \frac{(2t-1)^2}{(t^2-1)(t^2-t+1)} \frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2} dt \\ &= \int \frac{2}{t^2-1} = \int \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{1}{t+1} dt \\ &= \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\ &= \log \left| \frac{x + \sqrt{x^2-x+1} - 1}{x + \sqrt{x^2-x+1} + 1} \right| + C \end{aligned}$$

講評  $\int \frac{2}{t^2-1} dt$  までは出来ているのにそのあとの部分分数展開を間違えた人がかなりいました。分母に 2 次式がくる積分の計算練習を徹底的にやって下さい。  $t$  の式のままで終わっている人も結構いました。一応  $x$  の式に戻すところまでちゃんとやって下さい。実際の計算でそのような事が必要になることも多いでしょう。

$$(2) \int \frac{dx}{x + \sqrt{x+1}}$$

根号の中が一次式なので、これは  $t = \sqrt{x+1}$  とそのままおくタイプの問題です。  $x = t^2 - 1$  となるので、  $dx = 2t dt$  で、

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x+1}} = \int \frac{2t dt}{t^2 + t - 1}$$

$t^2 + t - 1 = 0$  の解は  $t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$  だから、部分分数展開をすると

$$\frac{2t}{t^2 + t - 1} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \frac{1}{t + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \frac{1}{t + \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

これを積分して

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x+1}} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \log \left| \sqrt{x+1} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| \\ + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \log \left| \sqrt{x+1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| + C$$

講評 部分分数展開が (1) より面倒なのと、置換積分が見慣れない事で戸惑った人が多かったようです。プリントの例の (2) で  $n = 2, a = b = 1, c = 0, d = 1$  の場合に当たります。