練習問題の解答と講評

練習 3.1　$f(x) = x$ と $[0,1]$ の n 等分点 $\{\frac{k}{n}; 0 \le k \le n\}$ で作る分割 Δ に対して $\overline{S}_\Delta(f)$ と $\underline{S}_\Delta(f)$ を求めよ。また、$n \to \infty$　のときこれらの極限を求めよ。

解答　各小区間 $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ 上の $f(x) = x$ の最小値と最大値は

$$M_k = \max_{\frac{k-1}{n} \le x \le \frac{k}{n}} f(x) = \frac{k}{n}$$
$$m_k = \min_{\frac{k-1}{n} \le x \le \frac{k}{n}} f(x) = \frac{k-1}{n}$$

だから、それぞれの区間幅が $\frac{1}{n}$ なので、

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}$$
$$\underline{S}_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n}$$

となり、$n \to \infty$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_\Delta(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_\Delta(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

講評　良くできていました。間違いでおやっと思ったのは、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ と計算できるのに、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)$ を間違える人が以外に多かった事です。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{n^2}{2}$ と勘違いした人と

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

としていた人が多かったです。1 を n 回足せば n になるのに、$\sum_{k=1}^{n} 1 = 1$ と書いてしまった様です。勘違いですね。

他に面白かったのは、n 等分点を t_i と書いたまま $f(x) = x$ なので、

$$M_i = \max\{t_{i-1}, t_i\} = t_i, \quad m_i = \min\{t_{i-1}, t_i\} = t_{i-1}$$

だから

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{1}{n} = \frac{t_1 + t_2 + \dots t_n}{n}$$

として、 $t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ は計算できないとした人がいました。しかし、$f(x) = x$ は連続だから積分可能なので、これは

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

に収束するとして、上の困難を回避しています。まぁ、間違いではないのですが、聞きたい事とはちょっと違いますね。やはり $\sum_{k=1}^{n} k$ の計算は覚えておいて欲しいですね。

一般の分点で考える時は、$Delta| \to 0$ のとき、

$$\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^2 \leq |\Delta| \sum (t_i - t_{i-1}) = |\Delta| \to 0$$

として、

$$\overline{S}_\Delta(f) + \underline{S}_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} (t_i + t_{i+1})(t_i - t_{i-1}) = \sum_{k=1}^{n} (t_i^2 - t_{i-1}^2) = 1$$

となることから、

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \overline{S}_\Delta(f) = \lim_{|\Delta| \to 0} \underline{S}_\Delta(f) = \frac{1}{2}$$

が出ます。