練習問題の解答と講評

練習 4.1　次の積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
(4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

解答　(1) 被積分関数は $x=0,1$ で無限大に発散するので、これは広義積分である。しかし、$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ の不定積分は $\sin^{-1}x$ であり、これは連続関数であり、$\sin^{-1}1=\frac{\pi}{2}, \sin^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{2}$ なので、

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}1 - \sin^{-1}(-1) = \pi$$

と計算して構わない。

(2)　これも広義積分である。大きな実数 N に対して

$$\begin{aligned}\int_0^N x^2e^{-x}\,dx &= -N^2e^{-N} + \int_0^N 2xe^{-x}\,dx \quad (\text{部分積分})\\ &= -N^2e^{-N} - 2Ne^{-N} + 2\int_0^N e^{-x}\,dx \quad (\text{もう一度部分積分})\\ &= -(N^2+2N+2)e^{-N}+2\end{aligned}$$

$N\to\infty$ のとき、これは $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形の極限だから、ロピタルの定理が使えて

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{N^2+2N+2}{e^N} &= \lim N\to\infty\frac{2N+2}{e^N} \quad (\text{分母分子を微分})\\ &= \lim N\to\infty\frac{2}{e^N} \quad (\text{分母分子を微分})\\ &= 0\end{aligned}$$

と計算できる。したがって、

$$\int_0^{\infty} x^2e^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N x^2e^{-x}\,dx = 2$$

(3)　これも広義積分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{dx}{1+x^2}\\ &= \lim_{N\to\infty}(\tan^{-1}N - \tan^{-1}(-N))\\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi\end{aligned}$$

(4) これも広義積分だが、$e^x = t$ とおくと不定積分が求まる。

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \tan^{-1} t = \tan^{-1}(e^x)$$

この関数は $x \to 0$ のとき $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ に近づき、$x \to \infty$ のとき $\frac{\pi}{2}$ に近づくので、

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{N\to\infty} (\tan^{-1}(e^N) - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$$

講評良くできていました。一番出来が良くなかったのが（4）でしたが、一度分母分子に e^x をかけると分かりやすい形になってますね。広義積分の置換積分も普通と同じように出来ます。惜しいのは $t = e^x$ と置き換えた時、$x = 0$ のときには $t = 1$ になるのに、$t = 0$ になると間違えた人がかなりいました。