練習問題の解答と講評

練習 5.1

(1) 次の広義積分が収束する事を確かめよ。

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

(2) すべての実数 p に対して次を証明せよ。

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty$$

ヒント：区間を $(0,1]$ と $(1,\infty)$ で分けて考える。$x=1$ では積分される関数は 1 （有限）なので、 $[1,\infty)$ で考えるのも $(1,\infty)$ で考えるのも同じ事になる。

解答　(1) 分母にある $\sin x$ は $x=0,\pi$ で 0 になるので、これも広義積分である。ただ、

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

の不定積分を求める事は出来ないので、工夫をする。これが広義積分可能かどうかは

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

であることから、原点での近くでは

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

の広義積分可能性を見ればよいと思われる。そこで、$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ では

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin x$$

を使って

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\pi}dx}{\sqrt{2x}} \\ &= \sqrt{2\pi x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi < \infty\end{aligned}$$

いっぽう、$y = \pi - x$ とおくと、$\sin(\pi - y) = \sin y$ なので、

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{\sin y}}$$

となり、

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \leq 2\pi$$

これは問題の積分が広義積分可能である事を示している。

(2)　積分を $x=1$ で二つに分ける。

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^p}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$$

どちらの項も非負なので、どちらかが無限大になる事を言えば良い。まず、$p \geq 1$ の時を考える。$0 < x \leq 1$ のとき、$x^p \leq x$ だから

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \geq \int_0^1 \frac{1}{x}dx = \log x\Big|_0^1 = \infty$$

となり、積分の値は ∞ である。一方、$p \leq 1$ のときは $1 \leq x < \infty$ のとき $x^p \leq x$ だから

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \log x\Big|_1^\infty = \infty$$

となり、やはり積分は無限大である。

講評 (1) では $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ とした人や、

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$$

が $0 < x < \pi$ で成り立つとした間違いが目立ちました。最初に書いた不等式は $0 < x < \pi$ では逆向きが正しく、後の不等式は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ では正しいのですが、$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ では正しくありません。グラフを書いて確かめてみましょう。

(2) では $\int \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p} + C$ という不定積分を間違えている人がまだ多数いました。この式はもちろん $p \neq 1$ で正しい式で、$p = 1$ のときは $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$ ですね。あとは $x \to 0$ または $x \to \infty$ のとき x^{1-p} が 0 に近づくか ∞ に近づくかを調べれば良く、p と 1 の大小関係が大事になります。なぜかそのことに気がつかない人が結構いました。$x \to 0$ でも $p > 1$ ならば $x^{1-p} \to \infty$ であることに気がついたかどうかがポイントでした。