練習問題の解答と講評

練習 9.1　次の広義重積分が収束する事を証明せよ。

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} dydx$$

解答

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{0\le x,y\le n} e^{-x-y}dxdy &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x}\,dx\int_0^n e^{-y}dy \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[1-e^{-N}\right]^2 = 1\end{aligned}$$

となり、正方形 $[0,n]^2$ 上の積分は $n\to\infty$ で収束している。被積分関数が非負なので、これはっこの広義重積分が収束している事を示している。　□

講評　これまでの練習問題の中で一番良くできていました。

$$\int_0^n e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^n$$

と正しく計算していながら、最後で

$$\left[-e^{-x}\right]_0^n = e^{-n} \to 0$$

としてしまった人がいました。これは大変残念な計算ミスですね。