# 練習問題の解答と講評

**練習 11.1**

ガンマ関数とベータ関数についての良く知られた式を証明しよう。$a>0, b>0$ のとき

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx \int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}\,dy = \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} x^{a-1}y^{b-1}e^{-x-y}\,dxdy$$

を 2 重積分と見る事ができる。
(1)　ここで、次のように変数を変換する。$u=x, v=x+y$. このとき、変換のヤコビアンと $u,v$ の動く範囲を求め、上の積分を $u,v$ の積分で表せ。
(2)　さらに変数を $w=\frac{u}{v}$, $z=v$ と変換して、変換のヤコビアンと $w,z$ の動く範囲を求め、

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$$

が成り立つ事を確かめよ。ただし、$B(a,b)$ はベータ関数で

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

とする。

**解答**　(1) 与えられた積分の積分域は $\{0\le x,y<\infty\}$ と書けるから変数変換　$u=x$, $v=x+y$ により、$x=u$, $y=v-u$ で、この領域は

$$\{0\le u<\infty, 0\le v-u<\infty\} = \{0\le u\le v<\infty\}$$

にうつる。ヤコビアンは

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

だから、

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_{\{0\le u\le v<\infty\}} u^{a-1}(v-u)^{b-1}e^{-v}\,dudv$$

(2) 次の変換　$w=v/u$, $z=v$ により、$u=zw$, $v=z$ となるので、積分域は

$$\{0\le wz\le z<\infty\} = \{0\le w\le 1, 0\le z<\infty\}$$

となる。また、ヤコビアンは

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(w,z)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial w} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial w} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = z$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
&\int_{\{0\le u\le v<\infty\}} u^{a-1}(v-u)^{b-1}e^{-v}\,dudv \\
&= \int_{\{0\le w\le 1,\,0\le z<\infty\}} (zw)^{a-1}(z-zw)^{b-1}e^{-z}\,z\,dz \\
&= \int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}\,dw \int_0^\infty z^{a+b-1}e^{-z}\,dz \\
&= B(a,b)\Gamma(a+b)
\end{aligned}
$$

**講評**　ほとんどの人が $(x,y)$ から $(u.v)$ への変換の際に、$(u,v)$ はともに $0$ から $\infty$ まで動くとしていました。中にはせっかく $0\le u\le v<\infty$ という不等式を書きながら $u,v$ は自由に $[0,\infty)$ を動くとしてしまった人も多かったです。$u,v$ が自由に $[0,\infty)$ を動くなら $v<u$ ともなれるはずで、これは元の変数に直すと $y<0$ も許されることになりおかしいですね。二つの変数の動く範囲を見るときは、一つ目の変数については動ける最大の範囲を求めればよいので、今の場合は $0\le v<\infty$ または $0\le u<\infty$ がきまります。しかし、いったんひとつの変数の範囲を決めたら、残りの変数の動ける範囲は最初にとった変数によって変わります。今の場合で言えば、

- $0\le v<\infty$ を先にきめたら、$u$ の動ける範囲は $0\le u\le v$
- $0\le u<\infty$ を先に決めたら、$v$ の動ける範囲は $u\le v<\infty$

と制限がかかります。大事なことですから何回も復習しておいてください。