

練習問題の解答と講評

練習 12.1 次の重積分を計算せよ。

$$(1) \int_{\{x^2+y^2 \leq a^2\}} \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \quad (2) \int_{\{x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}} (x^2 - y^2) dxdy$$

解答 (1) 極座標に変換して、($a > 0$ としておく。)

$$\begin{aligned} \int_{\{x^2+y^2 \leq a^2\}} \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} &= \int_{\{0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}} \frac{rdrd\theta}{\sqrt{1+r^2}} \\ &= 2\pi \int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{1+r^2}} \quad (u = 1+r^2 \text{ と変換}) \\ &= 2\pi \int_1^{1+a^2} \frac{du}{2\sqrt{u}} \\ &= 2\pi [\sqrt{u}]_1^{1+a^2} \\ &= 2\pi(\sqrt{1+a^2} - 1) \end{aligned}$$

(2) 極座標に変換して

$$\begin{aligned} \int_{\{x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}} (x^2 - y^2) dxdy &= \int_{\{0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}} r^3(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta \int_0^2 r^3 dr \\ &= 0 \end{aligned}$$

講評 (1) でも少しいましたが、(2) ではヤコビアンを忘れていた人がたくさんいました。変数変換をした時は、必ずヤコビアンの絶対値が変換した被積分関数にかかる事を忘れないように！

次に多かった間違いは

$$\left[\sqrt{1+t^2} \right]_0^a = \sqrt{1+a^2}$$

としたものが多かった事です。 $t = 0$ のとき、 $\sqrt{1+t^2}$ は 0 ではないですね。

また、 $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$ の積分の間違いも多かったです。復習しておいて下さい。