# まとめの練習問題 解答例

1. (1) これは一旦問題からはなれて $I_k = \int \cos^{2k} x\, dx$ の計算をしておく。部分積分により、

$$
\begin{aligned}
I_k &= \sin x \cos^{2k-1} x + (2k-1) \int \sin^2 x \cos^{2k-2} x\, dx \\
&= \sin x \cos^{2k-1} x + (2k-1) \int (1-\cos^2 x) \cos^{2k-2} x\, dx \\
&= \sin x \cos^{2k-1} x + (2k-1)(I_{k-1} - I_k) \\
&= \frac{1}{2k} \sin x \cos^{2k-1} x + \frac{2k-1}{2k} I_{k-1}
\end{aligned}
$$

これにより、求める積分は

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx &= I_3 - I_2 \\
&= \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x - \frac{1}{6} I_2 \\
&= \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x - \frac{1}{6 \cdot 4} \sin x \cos^3 x - \frac{3}{6 \cdot 4} I_1
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \\
&= \frac{x}{2} + \frac{\sin x \cos x}{2} + C
\end{aligned}
$$

だから

$$
\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x - \frac{1}{24} \sin x \cos^3 x - \frac{1}{16} \sin x \cos x - \frac{x}{16} + C
$$

(2) $\cos x = t$ とおくと、$\sin^2 x = 1 - t^2$ で、$-\sin x dx = dt$ だから、

$$
\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx = -\int (1-x^2) x^4 dt = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C
$$

(3)　加法定理より、

$$\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)$$

だから、

$$\int \sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{\cos 5x}{5}\right) + C$$

(4)　$\sqrt{x} = t$ とおくと、$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$ だから、

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \int \frac{2dt}{t-1} = 2\log|\sqrt{x}-1| + C\end{aligned}$$

(5)　$t = (x-4)^{1/3}$ とおく。$t^3 = x-4$ より $x = t^3+4$ だから $dx = 3t^2dt$ となり、

$$\begin{aligned}\int x(x-4)^{1/3}dx &= \int (t^3+4)\cdot t\cdot 3t^2dt = \int (3t^6+12t^3)\,dt \\ &= \frac{3(x-4)^{7/3}}{7} + 3(x-4)^{4/3} + C\end{aligned}$$

(6)　$x = a\sin t$ とおくと、$dx = a\cos t\,dt$ だから

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int a^2\cos^2 t\,dt \\ &= \frac{a^2}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C\end{aligned}$$

(7) $t = x + \sqrt{9+x^2}$ とおいて、$(t-x)^2 = 9+x^2$ これを $x$ について解くと、$x = (t^2-9)/2t$ となり、 $dx = (\frac{t^2+9}{2})t^{-2}dt.$ また、

$$\sqrt{9+x^2} = t - x = \frac{t^2+9}{2t}$$

だから、

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} &= \int \frac{2t}{t^2+9}\frac{t^2+9}{2t^2}dt \\ &= \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log|x+\sqrt{9+x^2}| + C\end{aligned}$$

(8)　$t = \sqrt{4-x^2}$ とおくと、$x = \sqrt{4-t^2}$ で、$dx = \frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}dt$ だから、

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx &= -\int \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\,dt \\
&= -\int \frac{t^2}{4-t^2}dt = \int \left(1 - \left(\frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t}\right)\right)dt \\
&= t + \log\left|\frac{2-t}{2+t}\right| + C \\
&= \sqrt{4-x^2} + \log\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2+\sqrt{4-x^2}}\right| + C
\end{aligned}$$

(9)　$t = x + \sqrt{x^2+2x+5}$ とおくと、$(t-x)^2 = x^2+2x+5$ これをといて、

$$x = \frac{t^2-5}{2(1+t)}, \qquad \therefore dx = \frac{t^2+2t+5}{2(1+t)^2}\,dt$$

また、

$$\sqrt{x^2+2x+5} = t - x = \frac{t^2+2t+5}{2(1+t)}$$

となる。これらを代入すると、

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} &= \int \frac{2(1+t)}{t^2+2t+5}\frac{t^2+2t+5}{2(1+t)^2}\,dt \\
&= \int \frac{dt}{1+t} = \log\left|1+x+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C
\end{aligned}$$

(10)　部分分数展開をする。$a, b, c$ を

$$\frac{7x^2+2x-3}{(2x-1)(3x+2)(x-3)} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{3x+2} + \frac{c}{x-3}$$

を満たすように求めよう。右辺を通分すると、分母は左辺の分母と同じになり、分子は

$$\begin{aligned}
&a(3x+2)(x-3) + b(2x-1)(x-3) + c(2x-1)(3x+2) \\
&= (3a+2b+6c)x^2 + (-7a-7b+c)x + (-6a+3b-2c)
\end{aligned}$$

となるので、分子を比較して、

$$3a+2b+6c = 7, \quad -7a-7b+c = 2, \quad -6a+3b-2c = -3$$

これを解くと、$a = \frac{1}{35}, b = -\frac{1}{7}, c = \frac{6}{5}$ となり、

$$\begin{aligned}\int \frac{7x^2+2x-3}{(2x-1)(3x+2)(x-3)}\,dx &= \frac{1}{35}\int \frac{dx}{2x-1} - \frac{1}{7}\int \frac{dx}{3x+2} + \frac{6}{5}\int \frac{dx}{x-3} \\ &= \frac{1}{70}\log|2x-1| - \frac{1}{21}\log|3x+2| + \frac{6}{5}\log|x-3| + C\end{aligned}$$

(11)　これも部分分数展開をする。

$$\frac{x-11}{x^2+3x-4} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x-1}$$

として、右辺を通分した時の分子は $a(x-1)+b(x+4) = (a+b)x+4b-a$ だから、 $a+b=1, 4b-a=-11$ となる。これを解いて $a=3, b=-2$ なので、

$$\int \frac{x-11}{x^2+3x-4}\,dx = \int \frac{3\,dx}{x+4} - \int \frac{2\,dx}{x-1} = 3\log|x+4| - 2\log|x-1| + C$$

(12)　これも部分分数展開をする。

$$\frac{x^3-8x^2-1}{(x+3)(x^2-4x+5)} = 1 - \frac{7x^2-7x+16}{(x+3)(x^2-4x+5)} = 1 - \frac{a}{x+3} - \frac{bx+c}{x^2-4x+5}$$

とかいて、右辺第 2 項と第 3 項を通分した時の分子は $(a+b)x^2 + (3b+c-4a)x+5a+3c$ となるので、$a+b=7$, $-4a+3b+c=-7$, $5a+3c=16$. これをといて $a=\frac{50}{13}$, $b=\frac{41}{13}$, $c=-\frac{14}{13}$ を得る。

$$\int \frac{1}{13}\left(\frac{41x-14}{x^2-4x+5}\right)dx = \frac{41}{26}\log|x^2-4x+5| + \frac{68}{13}\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx$$

ところで

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx &= \int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx \\ &= \int \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad (t=x-2,\ dt=dx) \\ &= \tan^{-1}(x-2) + C\end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-8x^2-1}{(x+3)(x^2-4x+5)}\,dx = x &- \frac{50}{13}\log|x+3| - \frac{41}{26}\log|x^2-4x+5| \\ &- \frac{68}{13}\tan^{-1}(x-2) + C\end{aligned}$$

(13)　部分積分をする。

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

(14)　これも部分積分をする。

$$\int x\sin 2x\,dx = -x\frac{1}{2}\cos 2x + \int \frac{\cos 2x}{2}\,dx = -x\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

(15)　これも部分積分をする。

$$\begin{aligned}\int x^3\log x\,dx &= \frac{x^4}{4}\log x - \int \frac{x^3}{4}\,dx \\ &= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{x^4}{12} + C\end{aligned}$$

(16)　これも部分積分をする。

$$\int x\tan^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - x + \tan^{-1}x + C$$

(17)　これも部分積分をする。$\cos^2\sin x = (-\cos^3 x)'$ だから、

$$\int x\cos^2 x\sin x\,dx = -x\cos^3 x + \int \cos^3 x\,dx$$

$\cos^3 = (1-\sin^2 x)\cos x$ だから

$$\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

したがって、

$$\int x\cos^2 x\sin x\,dx = -x\cos^3 x + \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

(18)　$y = x^3 + 4$ とおくと、 $x^3 = y - 4,\ 3x^2dx = dy$ で、

$$\begin{aligned}\int x^5\sqrt{x^3+4}\,dx &= \frac{1}{3}\int (y-4)\sqrt{y}\,dy \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{8}{3}y^{3/2}\right) + C \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\sqrt{(x^3+4)^5} - \frac{8}{3}\sqrt{(x^3+4)^3}\right) + C\end{aligned}$$

2.

(1) $x-1=t$ とおくと、$dx=dt$ で、

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \int_0^2 \frac{dt}{t^{1/3}} = \left[\frac{3}{4}t^{4/3}\right]_0^2 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

(2) $1-x^2=u$ とおくと、$du=-2xdx$ で、

$$\int_0^t \frac{xdx}{(1-x^2)^{1/3}} = \int_0^1 \frac{du}{2u^{1/3}} = \left[\frac{3}{8}u^43\right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

(3) $9-x^2=t$ とおくと、$dt=-2xdx$ で、

$$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}} = \int_0^9 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \left[\sqrt{t}\right]_0^9 = 3$$

(4) これは不定積分が分かっているので、

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1}x\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

(5) 部分分数展開をすると、

$$\frac{1}{x^2+x^4} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

だから、

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x^4} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} - \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(6) 主値積分を実行。$x=-\frac{3}{2}$ で分母が 0 になるので、

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 \frac{dx}{2x+3} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-2}^{-\frac{3}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{2x+3} + \int_{-\frac{3}{2}+\varepsilon}^0 \frac{dx}{2x+3}\right)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\log|-\varepsilon| + \log 3 - \log\varepsilon\right)\\ &= \frac{1}{2}\log 3\end{aligned}$$

3. (1) $1 \leq x < \infty$ のとき、$x^6 + x \geq x^6$ だから、

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+x}} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \left[\frac{-1}{2}x^{-2}\right]_1^\infty = \frac{1}{2} < \infty$$

したがってこの積分は収束。

(2) 部分積分をすると

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{e^{2x}} dx = \left[\frac{-1}{2}e^{-2x}\log x\right]_1^\infty + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{xe^{2x}}$$

となり、右辺第 1 項は 0 である。また、$x \geq 1$ のとき $\frac{1}{xe^{2x}} \leq e^{-2x}$ だから、

$$右辺第 2 項 \leq \frac{1}{2}\int_1^\infty e^{-2x}\, dx = \frac{e^{-2}}{4}$$

となり、この広義積分は有界で、被積分関数が非負なので収束する。

(3) $x \geq 3$ のとき、$\log x \geq 1$ だから、

$$\int_3^\infty \frac{\log x}{x}\, dx \geq \int_3^\infty \frac{dx}{x} = [\log x]_3^\infty = \infty$$

したがってこの積分は発散する。

(4) これは部分積分をすれば

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^3}\, dx = \left[-\frac{\log x}{2x^2}\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{dx}{2x^3} = \frac{1}{4}$$

4. 問題にミスプリントがありました。右辺の $\Sigma$ の上端は $2^n - 1$ ではなくて $2^{n-1}$ です。

(a) 数学的帰納法で証明する。

$n = 1$ のときは両辺 $\cos\frac{x}{2}$ なので、この式は自明に正しい。$n$ で等式が成り立つとして $n+1$ のとき

$$\begin{aligned} 左辺 &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\frac{(2k-1)x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

となるが、加法定理により

$$\begin{aligned}\cos\frac{(2k-1)x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n+1}} &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{(2k-1)x}{2^n}+\frac{x}{2^{n+1}}\right)+\cos\left(\frac{(2k-1)x}{2^n}-\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{(4k-1)x}{2^{n+1}}+\cos\frac{(4k-3)x}{2^{n+1}}\right]\end{aligned}$$

となり、これを $k=1$ から $k=2^{n-1}$ まで加えて $\frac{1}{2^{n-1}}$ をかけると、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\frac{(2k-1)x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\ &=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}2^n\cos\frac{(2k-1)x}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

(b) これは区間 $[0,1]$ を $2^n$ 等分した分割に対する $f(t)=\cos tx$ のリーマン和と思える。（各小区間の代表点が区間の中央の点になっている。）したがって、$\cos tx$ は $t$ の連続な関数だから積分が可能で、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}2^n\cos\frac{(2k-1)x}{2^{n+1}}=\int_0^1\cos tx\,dt$$

(c)

$$\int_0^1\cos tx\,dt=\left[\frac{\sin tx}{x}\right]_{t=0}^{t=1}=\frac{\sin x}{x}$$

なので、

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$$

(d) 記号として、$f(x)=\sqrt{2+2x}$ とおき、$f^{\circ 0}(x)=x$ $f^{\circ 1}(x)=f(x)$, $f(f(x))=f^{\circ 2}(x), f(f^{\circ n}(x))=f^{\circ(n+1)}(x)$ と書く事にする。半角の公式により、

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{\cos x+1}{2}$$

したがって

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}}=\frac{1}{2}f(\cos\frac{\pi}{2^n})$$

もう一度同じ事をやると、

$$f(\cos\frac{\pi}{2^n}) = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^n}} = \sqrt{2+f(\cos\frac{\pi}{2^{n-1}})} = f^{\circ 2}(\cos\frac{\pi}{2^{n-1}})$$

これを繰り返す事で $n \geq 1$ について

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = f^{\circ n}(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

を得る。(c) の式に $x = \frac{\pi}{2}$ を代入して上の式を使うと求める式が得られている。

5. (a) $\alpha > -1$ のとき、$x^\alpha e^{-x}$ は $(0, \infty)$ で広義積分可能で、

$$L(x^\alpha) = \int_0^\infty e^{-sx} x^\alpha \, dx$$

$s > 0$ なので、$v = sx$ と変換すると $dv = sdx$ で、積分範囲は変化しないので、

$$\begin{aligned} L(x^\alpha) &= \int_0^\infty \frac{v^\alpha}{s^\alpha} e^{-v} s^{-1} \, dv \\ &= \Gamma^{\alpha+1} s^{-\alpha-1} \end{aligned}$$

(b)

$$L(e^{alphax}) = \int_0^\infty e^{-sx+\alpha x} \, dx = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)x} \, dx$$

$s > \alpha$ ならばこの積分は収束するので、

$$\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)x} \, dx = \frac{1}{s-\alpha} \lim_{N\to\infty} \left[e^{-(s-\alpha)x}\right]_0^N = \frac{1}{s-\alpha}$$

がわかる。

(c) $s > 0$ のとき部分積分により

$$\begin{aligned} \int_0^N e^{-sx} \sin\alpha x \, dx &= \left[\frac{-1}{s} e^{-sx} \sin\alpha x\right]_0^N + \frac{\alpha}{s} \int_0^N e^{-sx} \cos\alpha x \, dx \\ &= -\frac{1}{s} e^{-sN} \sin\alpha N - \frac{\alpha}{s^2} \left[e^{-sx} \cos\alpha x\right]_0^N - \frac{\alpha^2}{s^2} \int_0^N e^{-sx} \sin\alpha x \, dx \\ &= \frac{1}{1+\frac{\alpha^2}{s^2}} \left[ -\frac{1}{s} e^{-sN} \sin\alpha N \frac{\alpha}{s^2} - \frac{\alpha}{s^2} e^{-sN} \cos\alpha N \right] \end{aligned}$$

したがって $N \to \infty$ とすると、

$$\int_0^\infty e^{-sx} \sin \alpha x \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_0^N e^{-sx} \cos \alpha x \, dx &= \left[ \frac{-1}{s} e^{-sx} \cos \alpha x \right]_0^N - \frac{\alpha}{s} \int_0^N e^{-sx} \sin \alpha x \, dx \\
&= \frac{1}{s}(1 - e^{-sN} \cos \alpha N) + \frac{\alpha}{s^2} \left[ e^{-sx} \sin \alpha x \right]_0^N - \frac{\alpha^2}{s^2} \int_0^N e^{-sx} \cos \alpha x \, dx \\
&= \frac{s}{s^2 + \alpha^2}(1 - e^{-sN} \cos \alpha N - \frac{\alpha}{s} e^{-sN} \sin \alpha N)
\end{aligned}$$

右辺は $s > 0$ のとき $\frac{s}{s^2+\alpha^2}$ に収束するが、$s \leq 0$ のときは振動する。($N = 2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \to \infty$ のときを考えるとよい。)

6. できるだけ簡単に判定する事を考える。

(1) $n \geq 1$ のとき $n^2 + 2n + 3 \leq 6n^2$ だから、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n^2 + 2n + 3} \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{6n} \geq \int_2^\infty \frac{1}{x} \, dx \\
= \infty
\end{aligned}$$

(2) 分母の次数が分子の次数より 2 大きいので、これは $\frac{1}{n^2}$ の和と比較したい。

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{3n+1}{n^3 - 4} = -\frac{4}{3} + \sum_{n=2}^\infty \frac{3n+1}{n^3 - 4}$$

後ろの級数は正項級数なので、この収束・発散を考えれば良い。$n \geq 2$ のとき $n^3 \geq 8$ だから $\frac{n^3}{2} \geq 4$ で、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^\infty \frac{3n+1}{n^3 - 4} &\leq \sum_{n=2}^\infty \frac{6n+2}{n^3} \\
&\leq \int_1^\infty \left( \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx \\
&\leq \left[ -6x^{-1} - x^{-2} \right]_1^\infty = 7 < \infty
\end{aligned}$$

したがってこの級数は収束する。

(3) これも分母の $n$ の指数は $3/2$ だから、収束するはず。正項級数なので、上からの評価を考える。$n \geq 1$ のとき、$n+1 \geq n$ なので、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} \\ &\leq 1 + \int_1^{\infty} x^{-3/2}\,dx = 1 + \left[-2x^{-1/2}\right]_1^{\infty} \\ &= 3 < \infty\end{aligned}$$

(4) これも $n \geq 1$ のとき $2n+1 \leq 4n$ だから

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}} \\ &\leq 2 + 2\int_1^{\infty} x^{-3/2}\,dx = 6 < \infty\end{aligned}$$

したがって、この級数も収束。