1　不定積分 I

復習：原始関数　部分積分　置換積分

1.1　基本的な関数の不定積分 – その 1

(1) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C,$　　ただし、$\alpha \neq -1.$

(2) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C, \quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}+C,$　　ただし、$a \neq 1.$

(3) $\displaystyle\int \log|x|\,dx = x\log|x| - x + C,$

(4) $\displaystyle\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C,$
$\displaystyle\int \cos(ax+c)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C,$　　ただし、$a \neq 0.$

(5) $\displaystyle\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C,$
$\displaystyle\int \tan(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\log\cos(ax+b)+C$　　ただし、$a \neq 0.$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$　　ただし、$a \neq 0.$

(7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}+C,$
$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$　　ただし、$a > 0.$

(8) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]+C$　　ただし、$a > 0.$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log|x+\sqrt{x^2+A}|+C$　　ただし、$A \neq 0.$

(10) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+A}+A\log|x+\sqrt{x^2+A}|\right]+C$
ただし、$A \neq 0$.

（８）は（７）と部分積分、（９）は $\sqrt{x^2+A}+x=t$ という変数変換（後述)、（１０）は（９）と部分積分

有理関数の不定積分　$\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ の積分　$P(x), Q(x)$ は多項式

（ $\mathrm{deg}P < \mathrm{deg}Q$ として良い）　部分分数展開

例）$\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ なので

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

として a,b,c を求めると $a=1/3, b=-1/3, c=-2/3$ となり、

$$\int \frac{1}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

$$\int \frac{1}{3(x-1)}dx = \frac{1}{3}\log|x-1|+C$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}dx &= \frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx \\ &= \frac{1}{6}\log|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx \\ &= \frac{1}{6}\log|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C\end{aligned}$$

基本的には

$$\int\frac{1}{(x-a)^n}\,dx, \quad \int\frac{1}{(a^2+x^2)^m}\,dx$$

に帰着 (後述の例を参照)

三角関数の不定積分

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \quad R(x,y) : x, y \text{ の多項式}$$

$t = \tan\frac{x}{2}$ と変数変換。

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$dt = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1+t^2}{2}dx \quad \therefore dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

したがって

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

例 1.1 1) $\int \cos^2 x\,dx = \sin x\cos x + \int \sin^2 x\,dx = \sin x\cos x + x - \int \cos^2 x\,dx = \frac{1+\sin x\cos x}{2} + C$

2) $I_m = \int \frac{dx}{(x^2+A)^m}$ $m \neq 1$ のときの I_m の満たす漸化式を求める。

$$\begin{aligned} I_{m-1} &= \frac{x}{(x^2+A)^{m-1}} + 2(m-1)\int \frac{x^2}{(x^2+A)^m}\,dx \\ &= \frac{x}{(x^2+A)^{m-1}} + 2(m-1)(I_{m-1} - AI_m) \end{aligned}$$

書き直すと、

$$I_m = \frac{1}{(2m-2)A}\left(\frac{x}{(x^2+A)^{m-1}} + (2m-3)I_{m-1}\right)$$

これにより順次 $I_1, I_2, \ldots$ と解けて行く。

練習 1.1 次の関数の不定積分をもとめよ。

(1) $\frac{1}{9-16x^2}$ (2) $\frac{1}{x^2+2x+5}$ (3) $\frac{\sin x}{16+\cos^2 x}$

(4) $\frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}$ (5) $\frac{4}{1-4x^2}$