10 多重積分

変数がたくさんある場合も積分は同じように定義できる。積分の順序も交換できるので、計算は累次積分によって実行できる。

10.1 三重積分

$\mathbb{R}^3$ の直方体 $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ 上の有界な関数 $f(x, y, z)$ が R 上積分可能であるとは、$i = 1, 2, 3$ に対して $[a_i, b_i]$ の分割

$$\Delta_i := \{a_i = t_{i,0} < t_{i,1} < \ldots < t_{i,n(i)} = b_i\}$$

を任意にとるとき、これらで作った R の分割

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Delta_3$$

について、$|\Delta| = \max\{|\Delta_i|; i = 1, 2, 3\}$ が 0 に近づくならば、上方和

$$\overline{S}_\Delta = \sum_{0 \le j_1 \le n(1)} \sum_{0 \le j_2 \le n(2)} \sum_{0 \le j_3 \le n(3)} \max_{(x,y,z) \in C(j_1,j_2,j_3)} f(x, y, z) \times |C(j_1, j_2, j_3)|$$

および下方和

$$\underline{S}_\Delta = \sum_{0 \le j_1 \le n(1)} \sum_{0 \le j_2 \le n(2)} \sum_{0 \le j_3 \le n(3)} \min_{(x,y,z) \in C(j_1,j_2,j_3)} f(x, y, z) \times |C(j_1, j_2, j_3)|$$

がそれぞれ同じ極限に近づく時にいう。

連続な関数は積分可能である。

また、広義積分についても重積分の時と同じで $|f|$ の広義積分可能性と f の広義積分可能性は同値である。積分は累次積分で計算するのも重積分の時と同じである。

例 10.1

$$\begin{aligned}\int_{0 \le x \le y \le z \le 1} xyz\,dxdydz &= \int_0^1 \int_0^z \int_0^y xyz\,dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_0^z yz\frac{y^2}{2}dydz \\ &= \int_0^1 z\frac{z^4}{8}dz = \left.\frac{z^6}{48}\right|_0^1 = \frac{1}{48}\end{aligned}$$

10.2 n 重積分

三重積分が定義できたら n 重積分も同じ様にして定義できる。n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ とは、n 個の実数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の全体の事である。式で書くと、

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,;\, x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n\}$$

となる。この空間の超直方体 R を

$$R = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,;\, , a_i \le x_i \le b_i, 1 \le i \le n\}$$

によって定める。各区間 $[a_i, b_i]$ の分割 Δ_i を

$$\Delta_i = \{a_i = x_i(0) < x_i(1) < \ldots < x_i(n_i) = b_i\}$$

ととり、これらで作られる R の分割 $\Delta = \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_n = \{C(j_1, j_2, \ldots, j_n)\}$ をとる。$C(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ は長方形で

$$C(j_1, j_2, \ldots, j_n) = [x_1(j_1 - 1), x_1(j_1)] \times \ldots \times [x_n(j_n - 1), x_n(j_n)]$$

の形をしている。R 上で定義された有界な関数 $f(x_1, \ldots x_n)$ が R 上（リーマン）積分可能とは、その上方和と下方和が $|\Delta_i| \to 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ のとき同じ極限に収束する時に言う。

$$\overline{S}_\Delta = \sum_{C(j_1,\ldots,j_n) \in \Delta} \max_{(x_1,\ldots,x_n) \in C(j_1,\ldots,j_n)} f(x_1, \ldots, x_n)|C(j_1, \ldots, j_n)|$$

$$\underline{S}_\Delta = \sum_{C(j_1,\ldots,j_n) \in \Delta} \min_{(x_1,\ldots,x_n) \in C(j_1,\ldots,j_n)} f(x_1, \ldots, x_n)|C(j_1, \ldots, j_n)|$$

ただし、$|C(j_1, \ldots, j_n)|$ は $C(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ の（超）体積 $\prod_{i=1}^n (x_i(j_i) - x_i(j_i - 1))$

このとき、極限を

$$\int_R f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

とかく。

R 上連続な関数は積分可能。 $A \subset R$ 上の積分は f に A 上 1 で、それ以外で 0 となる関数 1_A をかけた関数 $f \cdot 1_A$ が R 上積分可能なときに f は A 上積分可能と言い

$$\int_A f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_R f(x_1, \ldots, x_n) 1_A(x_1, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

と定める。
　積分の線形性、共通部分を持たない二つの集合 A, B に対して $A \cup B$ 上の積分は A 上の積分と B 上の積分の和となる事などは一変数の時と同じ。
　実際の計算はやはり累次積分を繰り返す事で計算する。

例 10.2

$$I_n = \int_{\{0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le 1\}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

を計算する。

$$\begin{aligned}
&\int_{\{0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le 1\}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_{\{0 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le 1\}} x_2 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \ldots \\
&= \int_{\{0 \le x_i \le x_{i+1} \le \ldots \le x_n \le 1\}} \frac{x_i^{i-1}}{(i-1)!} dx_i \cdots dx_n \\
&= \int_0^1 \frac{x_n^{n-1}}{(n-1)!} dx_n = \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

例 10.3

$$I_n = \int_{\{x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, x_1 + \ldots + x_n \le 1\}} dx_1 \cdots dx_n$$

を計算する。多変数の変数変換の理論を使うと簡単だが、ここでは順番に証明する。まず、$k \ge 0, 0 \le a \le 1$ に対して

$$\int_0^{1-a} (1-a-x)^k \, dx = \frac{(1-a)^{k+1}}{k+1}$$

を示す。$x = (1-a)y$ とかくと、$dx = (1-a)dy$ で、y の変域は $[0, 1]$ となり、

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-a} (1-a-x)^k \, dx &= \int_0^1 (1-a)^k (1-y)^k (1-a) dy \\
&= (1-a)^{k+1} \int_0^1 (1-y)^k \, dy = \frac{(1-a)^{k+1}}{k+1}
\end{aligned}$$

元の問題にもどる。重積分の時と同じ理由で、積分の順序を入れ換える事ができる。このとき、変数の動く範囲に注意して計算すると、

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{\{x_1 \ge 0, \ldots x_{n-1} \ge 0, x_1 + \ldots + x_{n-1} \le 1\}} \left(\int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-1}} dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&= \int_{\{x_1 \ge 0, \ldots x_{n-1} \ge 0, x_1 + \ldots + x_{n-1} \le 1\}} (1 - x_1 - \ldots - x_{n-1}) dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&= \int_{\{x_1 \ge 0, \ldots x_{n-2} \ge 0, x_1 + \ldots + x_{n-2} \le 1\}} \\
&\qquad \left(\int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-2}} (1 - x_1 - \ldots - x_{n-1}) \, dx_{n-1} \right) dx_1 \cdots dx_{n-2}
\end{aligned}$$

x_{n-1} についての積分で、上の公式で $a = x_1 + \ldots + x_{n-2}$ とおくことにより、

$$\int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-2}} (1 - x_1 - \ldots - x_{n-1}) dx_{n-1} = \frac{1}{2}(1 - x_1 - \ldots - x_{n-2})^2$$

となる。したがって

$$I_n = \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-3}} \int_0^{1-x_1-\ldots x_{n-3}} \frac{1}{2}(1 - x_1 - \ldots - x_{n-2})^2 \, dx_{n-2} \, dx_1 \cdots dx_{n-3}$$

となり、また公式が使える形になっている。これを繰り返す事により、

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} \, dx_1 = \frac{1}{n!}$$

がわかる。

練習 10.1 次の 3 重積分を計算せよ。

(i) $$\int_1^4 \int_{z-1}^{2z} \int_0^{y+2z} dxdydz$$

(ii) $$\int_{-2}^4 \int_{x-1}^{x+1} \int_0^{\sqrt{2y/x}} 2xyz\, dxdydz$$

練習 10.2 $J = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dxdy$ は $f(x,y)$ を $D = \{(x,y); 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1\}$ という領域の上で積分したものである。D は原点中心、半径 1 の円の第一象限にある部分だから、先に x をとめて y について積分した後 x について積分する事にすると、$D = \{(x,y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ とかける事から $J = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dydx$ ともかける。このことを参考にして $\int_0^2 \int_0^{4-2y} \int_0^{4-2y-z} f(x,y,z)\, dxdzdy$ の積分の順序を $dzdydx$ の順番で積分する事にした時、x, y, z のそれぞれの積分範囲がどう変わるかをかけ。