12 変数の変換 II

よく使う変数変換について、そのヤコビアンを計算しておこう。

12.1 平面の極座標

平面の極座標については、点 (x, y) と原点の距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ と、位置ベクトル (x, y) が x 軸の正の方向となす角 θ を用いて表す。円盤上の積分を実行するときなどに便利な変換である。これにより x, y は

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$

となる。ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

となる。$r = 0$ のとき、θ の値によらず $x = y = 0$ となってしまい、対応は 1 対 1 ではないが、このような (r, θ) の集合の面積は 0 なので、変数変換の公式が使える。

例 12.1 $e^{-x^2-y^2}$ を第 *1* 象限で積分する。

$$\begin{aligned} \int_{\{x\geq 0,\, y\geq 0\}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy &= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\theta dr \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty re^{-r^2}dr \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

ところで、左辺は

$$\int_{\{x\geq 0,\, y\geq 0\}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

と変形できるから、これから有名な定積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \therefore \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

を得る。パラメータつきで考えると便利で、$a > 0$ のとき、

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-y^2}\,\frac{dy}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

がわかる。

12.2 円筒座標

空間で極座標を考える前に、平面の極座標と空間の極座標の中間の円筒座標を紹介する。これは $(x, y, z) \mapsto (r, \theta, z)$ と変数を取り替える変換で、$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と表す。 z はそのままにしておく。場合によっては空間の極座標を使うよりもよい場合がある。ヤコビアンは、平面の極座標と同じ r になる。

例 12.2 $a > 0$ とする。円柱 $x^2 + y^2 \leq ax$ によって切り取られる球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ の体積を求める。円筒座標を使う。 x, y 平面の円周 $x^2 + y^2 = ax$ は中心が $(0, \frac{a}{2})$ で、半径が $\frac{a}{2}$ の円で、その内部は

$$r^2 - 2ar\cos\theta \leq 0 \qquad r \leq a\cos\theta$$

で与えられる。これから $\cos\theta \geq 0$ でなくてはならず、

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

となる。考えている球は円筒座標では

$$r^2 + z^2 \leq a^2 \qquad \therefore -\sqrt{a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$$

とかけるから、求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_{\{\frac{\pi}{2}\leq\theta\frac{\pi}{2},,r\leq a\cos\theta, -\sqrt{a^2-r^2}\leq z\leq\sqrt{a^2-r^2}\}} rdrd\theta dz \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos\theta} \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz\, rdr\, d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos\theta} 2\sqrt{a^2 - r^2} rdrd\theta \end{aligned}$$

ここで、$v=\sqrt{a^2-r^2}$ とおくと $vdv=-rdr$ で、積分範囲は $a|\sin\theta|\le v\le a$ にかわる。したがって、

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}2\sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{a|\sin\theta|}^{a}2v^2dvd\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a^3}{3}\left(1-|\sin^3\theta|\right)d\theta\\&=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1-\sin^3\theta d\theta\\&=\frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

を得る。

12.3 空間の極座標

空間の極座標は $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を使うので、$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ と書くことにして、$z=r\cos\phi,\rho=r\sin\phi$ とおく。 z 軸に関する回転移動は x,y で表せることから、ϕ の範囲は $0\le\phi\le\pi$ でよいことがわかる。x,y は

$$x=\rho\cos\theta=r\sin\phi\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta=r\sin\phi\sin\theta$$

と表すと、$0\le\theta<2\pi$ となり、r は非負の値をとる。ヤコビアンを計算しよう。

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial x}{\partial\phi}\\\frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial\phi}\\\frac{\partial z}{\partial r}&\frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial\phi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta\sin\phi&-r\sin\theta\sin\phi&r\cos\theta\cos\phi\\\sin\theta\sin\phi&r\cos\theta\sin\phi&r\sin\theta\cos\phi\\\cos\phi&0&-r\sin\phi\end{vmatrix}\\&=-cos\phi\begin{vmatrix}-r\sin\theta\sin\phi&r\cos\theta\cos\phi\\r\cos\theta\sin\phi&r\sin\theta\cos\phi\end{vmatrix}-r\sin\phi\begin{vmatrix}\cos\theta\sin\phi&-r\sin\theta\sin\phi\\\sin\theta\sin\phi&r\cos\theta\sin\phi\end{vmatrix}\\&=-r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\sin\phi\cos^2\phi-r^2\sin^3\phi(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\&=-r^2\sin\phi\end{aligned}$$

変数変換にはヤコビアンの絶対値がかかるから、極座標に変換する時は積分に $r^2\sin\phi$ がかかる事になる。

例 12.3 楕円体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le1$ の体積を求めよう。$a,b,c>0$ としておく。

変数変換は

$$x=ar\cos\theta\sin\phi,\ y=br\sin\theta\sin\phi,z=cr\cos\phi$$

となる。上の式をこの変換で書き換えると、

$$r^2\le1$$

となる。ヤコビアンは

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{partialx}{\partial\phi}\\\frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{partialy}{\partial\phi}\\\frac{\partial z}{\partial r}&\frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial\phi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\theta\sin\phi&-ar\sin\theta\sin\phi&ar\cos\theta\cos\phi\\b\sin\theta\sin\phi&br\cos\theta\sin\phi&br\sin\theta\cos\phi\\c\cos\phi&0&-cr\sin\phi\end{vmatrix}\\&=abcr^2\sin\phi\end{aligned}$$

なので、これを $0\le r\le1,0\le\theta\le2\pi,0\le\phi\le\pi$ で積分して、

$$V=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}r^2abc\sin\phi drd\theta d\phi=\frac{1}{3}\cdot2\pi\cdot2abc=\frac{4\pi}{3}abc$$

練習 12.1 次の重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2\le a^2\}}\frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ (2) $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2\le4,x\ge0,y\ge0\}}(x^2-y^2)dxdy$

練習 12.2 (自習用) 次の体積を求めよ。

(1) 円柱 $\{x^2+y^2\le1\}$ の内部で $0\le z\le x$ を満たす領域の体積

(2) 円柱 $\{x^2+y^2\le1\}$ の内部で $0\le z\le xy$ を満たす領域の体積

(3) 円柱 $\{x^2+y^2\le1\}$ と 球 $\{x^2+y^2+z^2\le a^2\}$ の共通部分の体積、ただし、$0<a<1$ とする。

練習 12.3 (自習用)

$$\int_{\{x\ge0,y\ge0,x+y\le4\}}e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$$

を計算せよ。ヒント：まず 極座標に直し、そののち

$$t=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

と変数変換。領域がどう移るかに注意すること。