2　不定積分 II

2.1　基本的な関数の不定積分 – その２

無理関数の不定積分

(1) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad R(x,y) : x, y$ の有理式

(a) $a > 0$ のとき
$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x$ とおく。

$$(t-\sqrt{a}x)^2 = ax^2+bx+c \quad \text{より} \quad x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x = t - \frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{2\sqrt{a}t+b}$$

また、$dx = \dfrac{2\sqrt{a}t^2+2bt+2c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}$ だから、$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ は t の有理式の積分で書けている。

(b) $a < 0, b^2-4ac > 0$ のとき $ax^2+bx+c = 0$ の二つの実解を $\alpha < \beta$ とおくとき、

$$t = \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

と変数を変換。x について解くと

$$x = \frac{\beta t^2+\alpha}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2(\beta-\alpha)t}{1+t^2}dt$$

また、

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}(\beta-x)t = \sqrt{-a}(\beta - \frac{\beta t^2+\alpha}{1+t^2})t$$

より、求める不定積分は t の有理式になる。

– $a < 0, b^2-4ac < 0$ のときは $\sqrt{ax^2+bx+c}$ は虚数になり、考えない。

(2) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx, \quad R(x,y)$ は x, y の有理式。

$t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ と変数を変換。x について解くと、

$$x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a}, \quad \therefore dx = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}$$

たしかにこのとき求める積分は t の有理関数の積分

(3)
$$\int x^p(ax^q+b)^r\,dx \quad (p,q,r \text{ は有理数 })$$

まず、とにかく $t = x^q$ とおいてみる。$x = t^{1/q}$ だから $dx = \frac{1}{q}t^{1/q-1}dt$ で、

$$\int x^p(ax^q+b)^r\,dx = \frac{1}{q}\int t^{(p+1)/q-1}(at+b)^r\,dt$$

$(p+1)/q$ か r のどちらかが整数ならば積分が計算できる。

(a) $(p+1)/q$ が整数のとき r の分母を n とかくとき、$u = (at+b)^{1/n}$ とおくと良い。$t = \frac{u^n-b}{a}$, $dt = nu^{n-1}du$

(b) r が整数のとき $(p+1)/q$ の分母を m として $u = t^{1/m}$ とおけばよい。
そうでないとき

$$\int t^{(p+1)/q-1}(at+b)^r\,dt = \int t^{(p+1)/q+r-1}\left(\frac{at+b}{t}\right)^r dt$$

とかいて、$(p+1)/q+r$ が整数ならば r の分母を n として $u = \left(\dfrac{at+b}{t}\right)^{1/n}$ とおいて積分が計算できる。

例 2.1 (1)　$A \neq 0$ のとき、$\sqrt{x^2+A}$ の不定積分を求める。
上の例の (1) の (a) の場合にあたる。
$t = \sqrt{x^2+A} + x$ とおく。$(t-x)^2 = x^2+A$ だから　$t^2-A = 2tx$ で、

$$x = \frac{t^2-A}{2t} \qquad \therefore dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{A}{t^2}\right)dt$$

また $\sqrt{x^2+A} = t - x = \frac{t}{2} + \frac{A}{2t}$ なので

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+A}\,dx &= \frac{1}{4}\int \left(t + \frac{A}{t}\right)\left(1 + \frac{A}{t^2}\right)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(t + \frac{2A}{t} + \frac{A^2}{t^3}\right)\,dx \\
&= \frac{t^2}{8} + \frac{A}{2}\log|t| - \frac{A^2}{8t^2} + C \\
&= \frac{1}{8}\left((\sqrt{x^2+A}+x)^2 - (\sqrt{x^2+A}-x)^2\right) \\
&\qquad + \frac{A}{2}\log|\sqrt{x^2+A}+x| + C \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\log|\sqrt{x^2+A}+x| + C
\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ の不定積分を求める。 上の例の (1) の (b) にあたる。

$t = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ とおくと、$t^2 x = 1 - x$ だから $x = \dfrac{1}{1+t^2}$ で、

$dx = -\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$ となり、

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx = -\int \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\,dt &= -\frac{t}{1+t^2} + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= -\frac{t}{1+t^2} + \tan^{-1} t + C \\
\therefore \int \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx &= \frac{t}{1+t^2} - \tan^{-1} t + C \\
&= \sqrt{x(1-x)} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{x}} + C
\end{aligned}$$

(3) $\sqrt{(1-x^3)x}$ の不定積分を求める。

$t = x^3$ とおいて、$x = t^{1/3}$, $dx = \frac{1}{3}t^{-2/3}\,dt$ なので

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{(1-x^3)x}\,dx &= \frac{1}{3}\int \sqrt{(1-t)t^{1/3}}\,t^{-2/3}\,dt \\
&= \frac{1}{3}\int \sqrt{\frac{1-t}{t}}\,dt \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{t(1-t)} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-t}{t}}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^3(1-x^3)} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x^3}{x^3}}\right) + C
\end{aligned}$$

最後の計算は前の例の計算を使った。

練習 2.1 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-x+1}}$

(2) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x+1}}$