3 定積分

3.1 定義と積分可能性

閉区間 $[a,b]$ 上で定義されている**有界な関数** $f(x)$ に対して**定積分** $\int_a^b f(x)\,dx$ を定義する。$f(x)$ がこの区間で非負ならば、この量は $x=a,\ x=b, y=f(x), y=0$ で囲まれた図形の面積になる。

a) **分割** $[a,b]$ 内に有限個の点 $\{t_0\}_{j=1}^n$ を $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ となるようにとる。これを区間 $[a,b]$ の一つの**分割**という。分割を Δ で表す。

b) **上方和** $\overline{S}_\Delta(f)$ と**下方和** $\underline{S}_\Delta(f)$ $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$ と関数 $f(x)$ に対して

$$\overline{S}_\Delta(f)=\sum_{j=1}^n M_j(t_j-t_{j-1})$$
$$\underline{S}_\Delta(f)=\sum_{j=1}^n m_j(t_j-t_{j-1})$$

ただし、

$$M_j=\max_{t_{j-1}\le x\le t_j} f(x),\qquad m_j=\min_{t_{j-1}\le x\le t_j} f(x)$$

とする。もし $f\ge 0$ で、$x=a,\ x=b, y=f(x), y=0$ で囲まれた図形の面積があるとして、その値を S と書けば、明らかに

$$\underline{S}_\Delta(f)\le S\le \overline{S}_\Delta(f)$$

が成り立っている。

c) **細分** $[a,b]$ の二つの分割 $\Delta_1=\{t_j\}_{j=0}^n$ と $\Delta_2=\{s_k\}_{k=0}^m$ について、$\{s_k\}\subset\{t_j\}$ つまり、Δ_2 の分点はすべて Δ_1 の分点にもなっているとき、分割 Δ_1 は分割 Δ_2 の**細分**であるという。Δ_1 が Δ_2 の細分のとき、上方和と下方和は次の不等式を満たす。

$$\overline{S}_{\Delta_1}(f)\le\overline{S}_{\Delta_2}(f),\quad \underline{S}_{\Delta_1}(f)\ge\underline{S}_{\Delta_2}(f)$$

d) (ダルブーの定理) 分割 $\Delta=\{t_j\}_{j=0}^n$ の巾 $|\Delta|$ を

$$|\Delta|=\max_{1\le j\le n}|t_j-t_{j-1}|$$

と書くことにする。このとき、

$$\overline{S}(f)=\lim_{|\Delta|\to 0}\overline{S}_\Delta(f)$$
$$\underline{S}(f)=\lim_{|\Delta|\to 0}\underline{S}_\Delta(f)$$

の二つの極限が存在する。

e) **リーマン積分** f が $[a,b]$ 上で $\overline{S}(f)=\underline{S}(f)$ を満たすとき**リーマン積分可能**といい、この値を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書く。

f) $[a,b]$ **上で連続な関数は積分可能。**

閉区間上で連続な関数は一様連続なので、任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ がとれて、$|x-y|<\delta$ ならば $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ となる。そこで、この δ に対して $|\Delta|<\delta$ となる分割 $\Delta=\{t_j\}_{j=0}^n$ をとると、それぞれの j で $|t_j-t_{j-1}|<\delta$ で、区間 $[t_{j-1},t_j]$ の中での f の最大値と最小値を取る点を t^*,s^* とかくと、$M_j=f(t^*)$, $m_j=f(s^*)$ で、t^*,s^* は区間 $[t_{j-1},t_j]$ の中の点だから $0\le M_j-m_j=f(t^*)-f(s^*)<\varepsilon$ となり、これから、

$$0\le\overline{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)\le\sum_{j=1}^n(M_j-m_j)|t_j-t_{j-1}|<\varepsilon(b-a)$$

を得る。したがって、$|\Delta|\to 0$ のとき $\overline{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)\to 0$ となり、極限として $\overline{S}(f)=\underline{S}(f)$ つまり f は積分可能

3.2 定積分の性質

いくつか基本的な性質をまとめておこう。

1. f が区間 $[a,b]$ で積分可能で、$a \le c < d \le b$ ならば f は区間 $[c,d]$ でも積分可能。

   $\because$ $\Delta = \{t_j\}$ を区間 $[a,b]$ の分割で、$|\Delta|$ が十分小さく
   $$\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \varepsilon$$
   とできるものとする。Δ の分点に c,d を付け加えた分割 Δ^* は Δ の細分になっているので、上で Δ を Δ^* に取り替えても上の不等式は成り立っている。したがって、もともと Δ は c,d を分点に含んでいるとしておいて良い。

   左辺は各小区間 $[t_{j-1},t_j]$ の f の最大値 M_j と最小値 m_j を使うと
   $$\sum_{j=1}^{n}(M_j - m_j)|t_j - t_{j-1}|$$
   と書き直せる。各項は非負なので、和を $[c,d]$ の分割の部分だけに限ればさらに小さくなる。これは f が $[c,d]$ 上で積分可能なことを示している。

2. f が区間 $[a,b]$ で積分可能なとき、$a < c < b$ ならば
   $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
   が成り立つ。

   $\because$ 分割 Δ が分点に c を含むとしてよい。このとき、上方和、下方和では二つの区間に分けられるのは明らかなので、極限を取ればよい。

3. f が $[a,b]$ で積分可能のとき、任意の分割 $\Delta = \{t_j\}$ に対して $t_{j-1} \le s_j \le t_j$ となる勝手な $\{s_j\}$ をとると、
   $$S_\Delta(f;\{s_j\}) = \sum_{j=1}^{n} f(s_j)(t_j - t_{j-1}) \to \int_a^b f(x)\,dx$$
   が $|\Delta| \to 0$ のときに成り立つ。

   $\because$ $m_j \le f(s_j) \le M_j$ であることから
   $$\underline{S}_\Delta(f) \le S_\Delta(f;\{s_j\}) \le \overline{S}_\Delta(f)$$

   なので、はさみうちの原理から
   $$S_\Delta(f;\{s_j\}) \to \int_a^b f(x)\,dx$$

4. f,g が $[a,b]$ で積分可能で、α,β を実数とするとき、
   $$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

   $\because$ これも上方和と下方和を見ればわかる。

5. $[a,b]$ 上で積分可能な f,g について、$f(x) \le g(x)$ が常に成り立つならば
   $$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

   $\because$ これも上方和か下方和を見れば明らか。

6. f が $[a,b]$ 上で積分可能ならば、任意の $a \le x \le b$ に対して $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ は連続な関数。

   $\because$ $f(x)$ は有界なので、$|f(x)| \le M$ が区間 $[a,b]$ 上で成り立っているとすると、
   $$|F(x+h) - F(x)| = |\int_x^{x+h} f(t)\,dt| \le M\int_x^{x+h} dt = Mh$$
   これは　$h \to 0$ のとき 0 に近づく。したがって $F(x)$ は連続

練習 3.1 $f(x) = x$ と $[0,1]$ の n 等分点 $\{\frac{k}{n}; 0 \le k \le n\}$ で作る分割 Δ に対して $\overline{S}_\Delta(f)$ と $\underline{S}_\Delta(f)$ を求めよ。また、$n \to \infty$　のときこれらの極限を求めよ。