5　定積分の計算 II

5.1　無限区間上の積分：これも広義積分

有界でない関数の積分が定義できるように、無限区間上の関数の積分が定義できることがある。これも広義積分と呼ぶ。

関数 f が任意の大きな数 A に対して区間 $[a, A]$ 上で積分可能であり、

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,dx$$

が存在するとき、 f は区間 $[a,\infty)$ 上で広義積分可能といい、この極限を

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

とかく。

実数全体の上での広義積分は $[0,\infty)$ 上でも $(-\infty,0]$ 上でも f が広義積分可能なときに考えることができる。このとき

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx$$

によって全区間 $(-\infty,\infty)$ 上の広義積分を定義する。

例 5.1 $f(x)=e^{-x}$ を $[0,\infty)$ 上で積分する。

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{A\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^A = \lim_{A\to\infty}\left(1-e^{-A}\right) = 1$$

例 5.2 $f(x)=e^{-x}\sin x$ を $[0,\infty)$ 上で積分する。

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{-x}\sin x &= -e^{-x}\sin x\Big|_0^A + \int_0^A e^{-x}\cos x\,dx\\ &= -e^{-A}\sin A - e^{-x}\cos x\Big|_0^A - \int_0^A e^{-x}\sin x\,dx\\ \therefore 2\int_0^A e^{-x}\sin x\,dx &= 1-e^{-A}(\cos A+\sin A)\end{aligned}$$

だから、これで $A\to\infty$ とすると

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx = 1$$

5.2　定積分の収束と発散

$|f(x)|$ が考えている区間で広義積分可能な時、積分は**絶対収束**するという。積分が絶対収束すれば f は広義積分可能である。これは $a<b$ のとき

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

となる事から分かるが、この不等式は $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$ という関係を積分すると、

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)\,dx$$

となるので分かる。実際、例えば $[0,\infty)$ で f が絶対収束するとき、

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b |f(x)|\,dx$$

が存在する。つまり、 $b<b'$ が十分大きい時には

$$\int_0^{b'} |f(x)|\,dx - \int_0^b |f(x)|\,dx = \int_b^{b'} |f(x)|\,dx$$

の値はいくらでも小さくなる。したがって、

$$\left|\int_0^{b'} f(x)\,dx - \int_0^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_b^{b'} f(x)\,dx\right|$$

の値も上の不等式からいくらでも小さくなる。つまり f は広義積分可能となる。

例 5.3 絶対収束しないが広義積分が可能な関数として $[0,\infty)$ 上で

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\ \text{のとき},\\ 1, & x=0\ \text{のとき}\end{cases}$$

が知られている。この関数は $x=0$ では連続なので、広義積分が可能かどうかは

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx$$

が存在するかどうかで決まる。

$$\begin{aligned}\left|\int_0^b f(x)\,dx - \int_0^{b'} f(x)\,dx\right| &= \left|\int_b^{b'} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \\ &= \left|\frac{\cos b}{b} - \frac{\cos b'}{b'} - \int_b^{b'} \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \\ &\le \frac{2}{b} + \int_b^{b'} \frac{1}{x^2}\,dx \\ &\le \frac{3}{b}\end{aligned}$$

これは $b < b', b \to \infty$ のとき、0 に収束し、f が広義積分可能である事が分かる。一方、

$$\int_b^{b'} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \frac{1}{\sqrt{2}} N(b, b') \frac{\pi}{4}$$

ただし、$N(b, b')$ は $[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ という形の区間で $[b, b']$ の中にあるものの個数。これは $b' \to \infty$ のとき ∞ に発散。したがって絶対収束はしない。

広義積分の収束に関して次の条件は良く使われる。

$[a, \infty)$ 上で $f(x) \ge 0$ のとき、$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ が収束するには $\int_a^b f(x)\,dx$ が b について上に有界な事が十分である。このことはベータ関数の収束のところでも使った理由による。

例 5.4 (Γ-関数) $s > 0$ に対して

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx$$

は収束する。実際、被積分関数 $x^{s-1}e^{-x}$ は非負なので、任意の小さな $\varepsilon > 0$ と大きな $N > 0$ に対して

$$\int_\varepsilon^1 x^{s-1} e^{-x}\,dx \quad と \quad \int_1^N x^{s-1} e^{-x}\,dx$$

が上に有界である事を言えば良い。

$$\int_\varepsilon^1 x^{s-1} e^{-x}\,dx \le \int_\varepsilon^1 x^{s-1}\,dx = \frac{1 - \varepsilon^s}{s} \le \frac{1}{s}$$

また、$x \ge 1$ のとき $x^2 f(x) = x^{s+1} e^{-x}$ は最大値 $\max\{1, (s+1)^{s+1} e^{-(s+1)}\}$ を取るので、これを M とかくと、$f(x) \le M x^{-2}$ が分かる。従って

$$\int_1^N x^{s-1} e^{-x}\,dx \le M \int_1^N x^{-2}\,dx = M\left(1 - \frac{1}{N}\right) \le M$$

以上より

$$\int_\varepsilon^N x^{s-1} e^{-x}\,dx \le M + \frac{1}{s}$$

となるので、積分は収束している。

練習 5.1 (1) 次の広義積分が収束する事を確かめよ。

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

(2) すべての実数 p に対して次を証明せよ。

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p} = \infty$$

ヒント：区間を $(0, 1]$ と $(1, \infty)$ で分けて考える。$x = 1$ では積分される関数は 1 （有限）なので、 $[1, \infty)$ で考えるのも $(1, \infty)$ で考えるのも同じ事になる。